

516.23076

PH561P

QUANG

n Toán,

TTLT Vĩnh Viễn, TP. Hồ Chí Minh)



Phương pháp Giải toán

Hình học không gian



DVL.013676

THEO CHỦ ĐỀ

Dành cho học sinh

11 - 12

Luyện thi

Đại học

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



516.23076
PH 561 P

TRẦN MINH QUANG

(Giáo viên chuyên Toán – Trung tâm luyện thi Vĩnh Viễn
TP. Hồ Chí Minh)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN THEO CHỦ ĐỀ

**Dành cho học sinh 11 – 12
Và luyện thi Đại học**



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896

Hành chính: (04) 39714899; Tổng Biên tập: (04)39715011;

Fax: (04) 39729436

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: LAN HƯƠNG

Sửa bài: THÁI VĂN

Trình bày bìa: THÁI HỌC

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN THEO CHỦ ĐỀ

Mã số: 1L - 270ĐH2014

In 1.000 cuốn, khổ 17 × 24cm tại Công ty Cổ phần Văn hóa Văn Lang - TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản: 1260 - 2014/CXB/01 - 225/ĐHQGHN ngày 26/6/2014.

Quyết định xuất bản số: 377LK - TN/QĐ – NXBĐHQGHN ngày 27/6/2014.

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2014.

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả thân mến!

Theo chương trình Phân ban của Bộ Giáo dục và Đào tạo, từ năm 2009 đề thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng, bài toán hình học không gian là bài bắt buộc. Đề toán chủ yếu ở phần tính thể tích các khối đa diện và khối tròn xoay. Điều rất cần thiết để làm được các bài toán này là học sinh phải nắm vững các dạng toán quan hệ song song, vuông góc của lớp 11.

Hình học không gian là một dạng toán khó, là nỗi ám ảnh của nhiều học sinh THPT trước các kì thi. Chúng tôi biên soạn cuốn sách này nhằm giúp các em giảm tải được khó khăn khi làm toán Hình học không gian. Cuốn sách được trình bày dưới dạng 27 chủ đề toán hình không gian. Các chủ đề đầu nhằm giúp học sinh nắm vững các dạng toán cơ bản ở lớp 11: tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, góc phẳng nhị diện,... nhằm để trích dẫn học sinh 12 có thể giải quyết các bài toán thể tích một cách dễ dàng.

Chúng tôi dẫn dắt các bài tập đã có trong các đề thi tốt nghiệp THPT, đề thi chính thức và dự bị tuyển sinh vào Đại học nhiều năm qua, để các bạn học sinh có thể chuẩn bị kĩ hơn cho kì thi tốt nghiệp, tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng sắp tới.

Mặc dù đã rất cố gắng biên soạn trong lần tái bản này, song cuốn sách có thể còn một số sai sót, rất mong bạn đọc góp ý thêm để cuốn sách được hoàn thiện hơn cho lần tái bản sau.

Xin chân thành cảm ơn quý đọc giả.

TP. Hồ Chí Minh, tháng 5 năm 2014

Tác giả

TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG CẮT NHAU

1. Tiên đề

- Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.
- Có một và chỉ một mặt phẳng qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.
- Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả điểm chung của hai mặt phẳng đó.

2. Định lý : Nếu một đường thẳng qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.

3. Một mặt phẳng được xác định nếu :

- Qua ba điểm không thẳng hàng.
- Qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.
- Qua hai đường thẳng cắt nhau.

4. Phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau

Ta đi tìm hai điểm A, B đồng thời nằm trên hai mặt phẳng đã cho. Giao tuyến cần tìm là đường thẳng AB .

BT1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm AC và BC . Lấy K trên cạnh BD sao cho $KD < KB$. Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với $mp(ACD)$ và $mp(ABD)$.

- Trên $mp(BCD)$ do $KD < KB$ nên JK cắt CD tại M .

Ta có: $I \in AC \Rightarrow I \in mp(ACD)$

$$M \in CD \Rightarrow M \in mp(ACD)$$

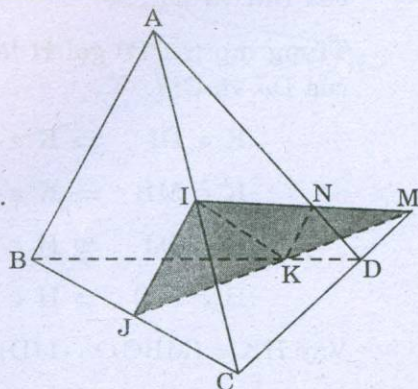
Mặt khác, hiển nhiên I và $M \in mp(IJK)$.

$$\text{Vậy } mp(IJK) \cap mp(ACD) = IM.$$

- Xét $mp(ACD)$. Gọi $\{N\} = IM \cap AD$

Lập luận tương tự câu a,

$$mp(IJK) \cap mp(BAD) = KN \quad \blacksquare$$



BT2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là hai điểm bên trong của $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (AMN) và (BCD)

b) (DMN) và (ABC).

a) Trên mp (ABD), gọi $\{H\} = AM \cap BD$

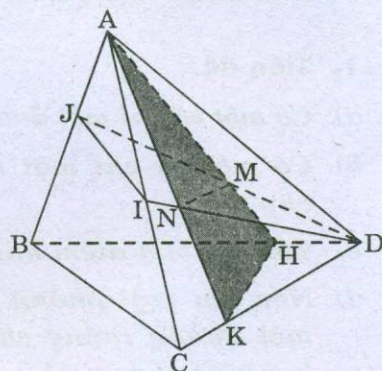
Trên mp (ACD), gọi $\{K\} = AN \cap CD$

Do đó : $HK = mp (AMN) \cap mp (BCD)$.

b) Trên mp (ABD), gọi $\{J\} = DM \cap AB$

Trên mp (ACD), gọi $\{I\} = DN \cap AC$

Do đó : $IJ = mp (DMN) \cap mp (ABC)$ ■



BT3. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NDA).

b) Lấy I, J là hai điểm lần lượt nằm trên hai đoạn thẳng AB và AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (IJD).

a) Ta có : $M \in (MBC)$

$M \in AD$ nên $M \in (NDA)$

$N \in (NDA)$

$N \in BC$ nên $N \in (MBC)$

Vậy MN là giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NDA).

b) Trong mp (ABD) gọi K là giao điểm của BM và DI.

Trong mp (ACD) gọi H là giao điểm của DJ và CM.

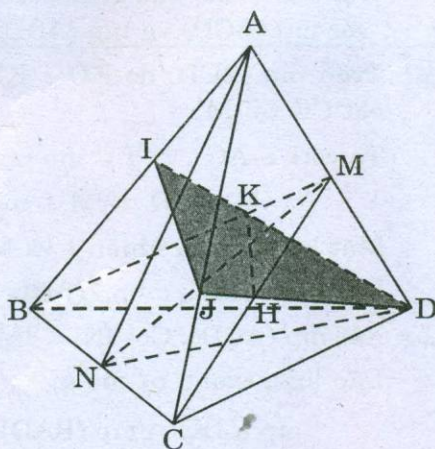
$K \in DI \Rightarrow K \in (IJD)$

$K \in MB \Rightarrow K \in (MBC)$

$H \in DJ \Rightarrow H \in (IJD)$

$H \in MC \Rightarrow H \in (MBC)$

Vậy $HK = (MBC) \cap (IJD)$ ■



BT4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy tứ giác ABCD có hai cạnh đối không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác SCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :

a) (SBM) và (SCD)

b) (AMB) và (SDC).

a) Trong mp (SCD), SM cắt CD tại I.

$$I \in SM \Rightarrow I \in \text{mp (SBM)}$$

$$I \in CD \Rightarrow I \in \text{mp (SCD)}$$

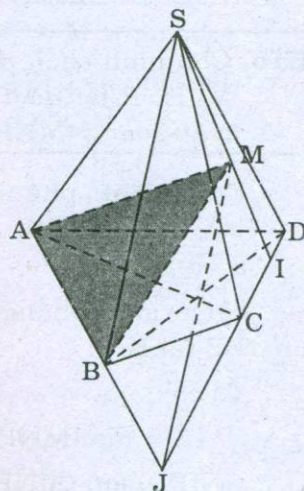
Vậy giao tuyến của hai mp (SCD) và mp (SBM) là SI.

b) Hai mp (ABM) và (SDC) đã có chung điểm M.
Trên mp (ABCD), AB cắt CD tại J.

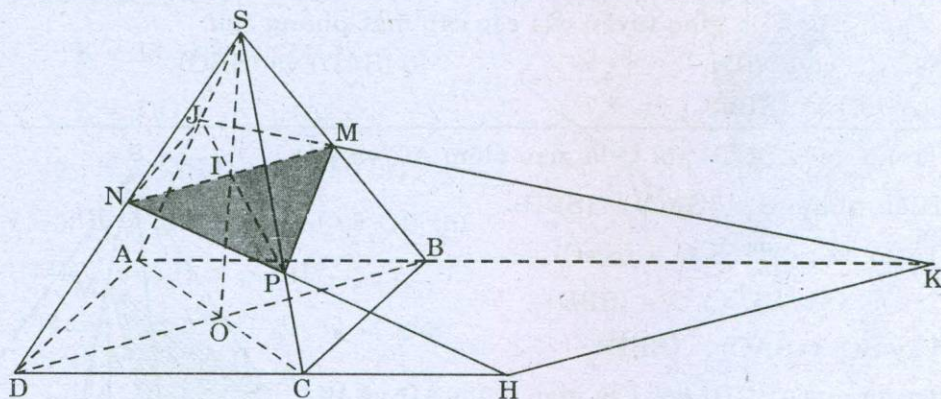
$$J \in AB \Rightarrow J \in \text{mp (MAB)}$$

$$J \in CD \Rightarrow J \in \text{mp (SCD)}$$

Vậy giao tuyến của hai mp (ABM) và mp (SDC) là MJ ■



BT5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD. Lấy P trên cạnh SC mà $SP > PC$. Tìm giao tuyến của mp (MNP) lần lượt với các mặt phẳng (SAC), (SAB), (SAD) và (ABCD).



* Trên mp (SBD), gọi $\{I\} = MN \cap SO$

Mà $SO \subset \text{mp (SAC)}$ nên $I \in \text{mp (SAC)}$

Vậy $PI = \text{mp (MNP)} \cap \text{mp (SAC)}$.

* Trên mp (SAC), gọi $\{J\} = PI \cap SA$

Vậy $MJ = mp(MNP) \cap mp(SAB)$.

* Dễ thấy $JN = mp(MNP) \cap mp(SAD)$

* Trên mp(SAB), gọi $\{K\} = JM \cap AB$

Trên mp(SCD), gọi $\{H\} = NP \cap CD$

thì $HK = mp(MNP) \cap mp(ABCD)$ ■

BT6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC) và (SCD).

Trên mặt phẳng (ABCD), MN lần lượt cắt AB, AD và AC tại I, J và E.

Trên mặt phẳng (SAC), SA cắt EP tại K.

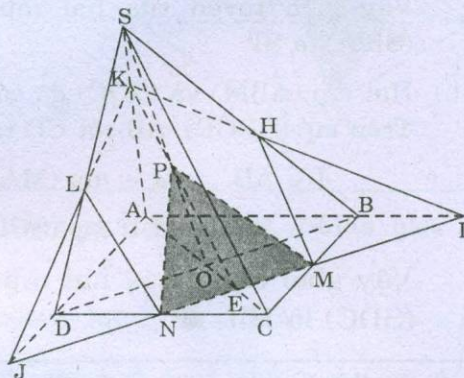
Ta có :

$IK = mp(MNP) \cap mp(SAB)$

và $JK = mp(MNP) \cap mp(SAD)$

Trên mp(SAB), SB cắt IK tại H thì $MH = mp(SBC) \cap mp(MNP)$

Trên mp(SAD), SD cắt JK tại L thì $NL = mp(SCD) \cap mp(MNP)$ ■



BT7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang $AB \parallel CD$. Lấy M trên cạnh SC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAC) và (SBD)

b) (SAD) và (SBC)

c) (ADM) và (SBC).

a) Trong mp(ABCD) gọi O là giao điểm AC và BD.

Hiển nhiên $S \in (SAC) \cap (SBD)$

Ta có: $O \in AC \Rightarrow O \in (SAC)$

$O \in BD \Rightarrow O \in (SBD)$

Vậy $SO = (SAC) \cap (SBD)$

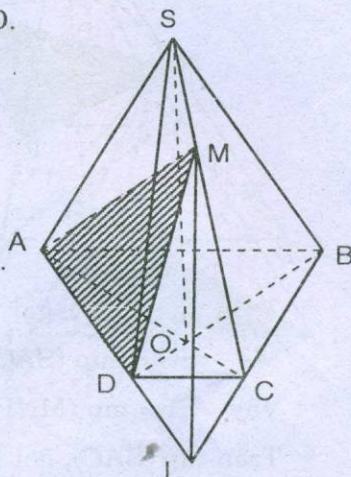
b) Trong mp(ABCD) gọi I là giao điểm AD và BC.

Hiển nhiên: $S \in (SAD) \cap (SBC)$

Ta có: $I \in AD \Rightarrow I \in (SAD)$

$I \in (BC) \Rightarrow I \in (SBC)$

Vậy $SI = (SAD) \cap (SBC)$



c) Hiển nhiên: $M \in (ADM) \cap (SBC)$

Ta có: $I \in AD \Rightarrow I \in (ADM)$

$I \in BC \Rightarrow I \in (SBC)$

Vậy $IM = (ADM) \cap (SBC)$ ■

BT8. Cho tứ diện ABCD. Lấy O là điểm bên trong $\triangle BCD$, M trên AO.

a) Tìm giao tuyến của mp(MCD) với mp(ABO); mp(ABC) và mp(ABD).

b) Lấy I trên BC, J trên BD. Tìm giao tuyến của (IJM) và (ACD).

a) • Trong mp(BCD) gọi H là giao điểm OB và CD.

Vậy $MH = (ABO) \cap (MCD)$

• Trong mp(ABO) gọi N là giao điểm HM và AB

Hiển nhiên $C \in (MCD) \cap (ABC)$

$N \in MH \Rightarrow N \in (MCD)$

$N \in AB \Rightarrow N \in (ABC)$

Vậy $CN = (MCD) \cap (ABC)$

• Dễ dàng thấy $ND = (MCD) \cap (ABD)$

b) • Trong mp(BCD) gọi K là giao điểm IJ và CD

$K \in IJ \Rightarrow K \in (MIJ)$

$K \in CD \Rightarrow K \in (ACD)$

Vậy $K \in (MIJ) \cap (ACD)$ (1)

• Gọi R là giao điểm IJ và OB thì

$MR = (MIJ) \cap (ABH)$

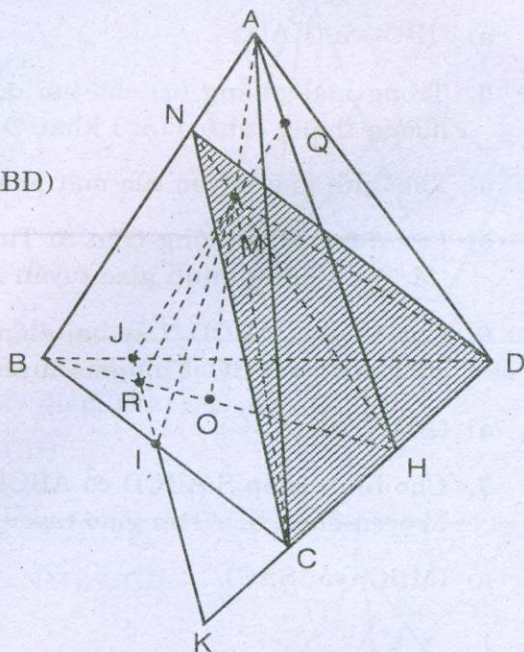
Trong mp(ABH) gọi Q là giao điểm MR và AH

$Q \in MR \Rightarrow Q \in (MIJ)$

$Q \in AH \Rightarrow Q \in (ACD)$

Vậy $Q \in (MIJ) \cap (ACD)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KQ = (MIJ) \cap (ACD)$. ■



BÀI TẬP TỰ GIẢI

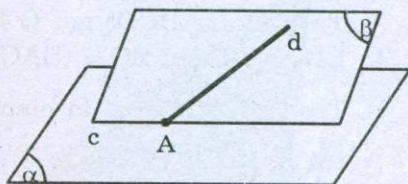
- Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M, N là trung điểm AC và BC. Trên BD lấy điểm K sao cho BK = 2KD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MKN) và (ABD).
- Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD cắt nhau. Lấy A' là điểm nằm giữa S và A. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (A'D) với các mặt phẳng (ABCD), (SAB), (SBC), (SCD), (SDA).
- Cho tứ diện ABCD. Lấy O là điểm bên trong ΔCBD, M trên AO. Lấy I, J trên BC và BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :
 - (MCD) và (ABD).
 - (IJM) và (ACD).
- Cho tứ diện ABCD. Gọi I, K là trung điểm của AD và BC. Lấy M, N trên đoạn AB, AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :
 - (IBC) và (KAD).
 - (IBC) và (DMN).
- Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại O, Δ là đường thẳng cắt (α) tại I khác O.
 - Xác định giao tuyến của mặt phẳng (O, Δ) và (α).
 - Lấy điểm M di động trên Δ. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (Δ, d_1) và (M, d_2). Chứng minh giao tuyến này nằm trong mặt phẳng cố định.
- Cho tứ diện ABCD. Lấy hai điểm M, N trên SB, SC sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :
 - (AMN) và (ABC).
 - (ABN) và (ACM).
- Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang với AB là đáy lớn. Lấy M trên đoạn SD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng :
 - (MBC) và (SAC).
 - (MBC) và (SAD).

Chủ đề 2

TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG d VÀ MẶT PHẪNG (α)

Phương pháp

- Tìm mặt phẳng (β) chứa d .
- Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β) theo chủ đề 1.
- Tìm giao điểm A của d và c thì A chính là giao điểm của d và mp (α) .



BT1. Cho tứ giác ABCD có AB không song song CD. Gọi S là điểm nằm ngoài mp (ABCD), M là trung điểm SC. Tìm giao điểm N của SD và mp (MAB).

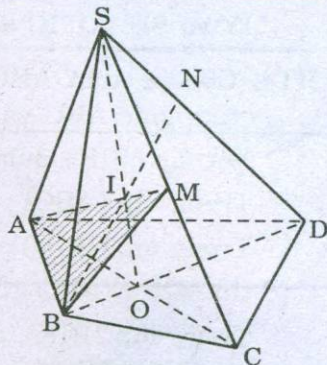
Trên mp (SAC), gọi $\{I\} = AM \cap SO$

Xét mặt phẳng (SBD) chứa SD.

Ta có mp (SBD) $\cap$ mp (MAB) = BI

Trên mp (SBD), gọi $\{N\} = BI \cap SD$

thì $\{N\} = SD \cap (mp (MAB))$ ■



BT2. Cho tứ diện ABCD. Lấy hai điểm M, N lần lượt trên AC và AD sao cho MN không song song CD. Lấy điểm O bên trong $\triangle BCD$.

a) Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD)

b) Tìm giao điểm BC, BD và (OMN).

a) Trong mp(ACD) gọi I là giao điểm NM và CD.

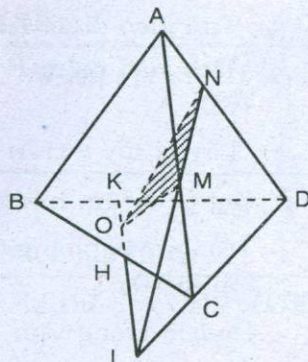
Hiển nhiên $OI = (OMN) \cap (BCD)$

b) Trong mp(BCD) gọi H, K là giao điểm OI với BC, BD

$K, H \in OI \Rightarrow K, H \in (OMN)$

Vậy $\{H\} = BC \cap (OMN)$

$\{K\} = BD \cap (OMN)$ ■



BT3. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy M trên cạnh SC .

a) Tìm giao điểm AM và (SBD)

b) Lấy N trên cạnh BC . Tìm giao điểm SD và (AMN)

a) Xét mặt phẳng phụ (SAC) chứa AM .

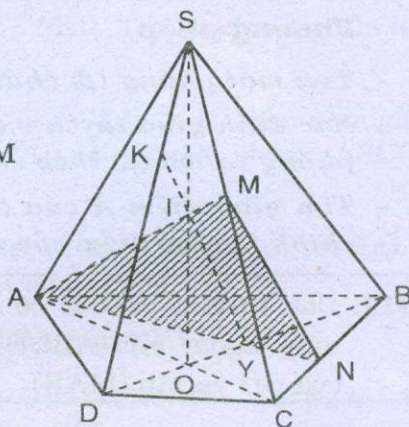
Trong $mp(ABCD)$ gọi O là giao điểm BD và AC thì $SO = (SAC) \cap (SBD)$

Trong (SAC) gọi I là giao điểm SO và AM thì $\{I\} = AM \cap (SBD)$

b) Xét mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD

Trong $mp(ABCD)$ gọi Y là giao điểm BD và AN thì $IY = (SBD) \cap (AMN)$

Trong $mp(SBD)$ gọi K là giao điểm IY và SD thì $\{K\} = SD \cap (AMN)$. ■



BT4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K lần lượt là hai điểm trong của các tam giác ABC và BCD . Giả sử IK cắt $mp(ACD)$ tại H . Tìm H .

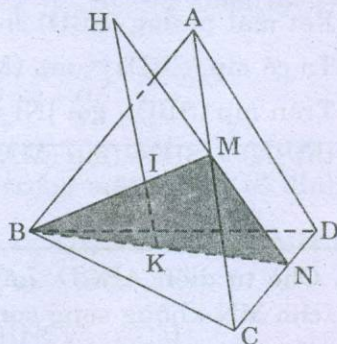
Xét $mp(BIK)$ chứa IK

Trong $mp(ABC)$: BI cắt AC tại M

Trong $mp(BCD)$: BK cắt CD tại N

thì $MN = (BIK) \cap (ACD)$

Trong $mp(BIK)$, giả sử IK cắt MN tại H thì H chính là giao điểm của IK và $mp(ACD)$ ■



BT5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC .

a) Tìm giao điểm I của AM và $mp(SBD)$. Chứng minh $IA = 2IM$.

b) Tìm giao điểm F của SD và $mp(ABM)$. Chứng minh F là trung điểm SD .

c) Lấy N tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của MN và $mp(SBD)$.

a) Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SAC) , AM cắt SO tại I thì I là giao điểm của AM và $mp(SBD)$.

Do I là trọng tâm $\triangle SAC$ nên $IA = 2IM$.

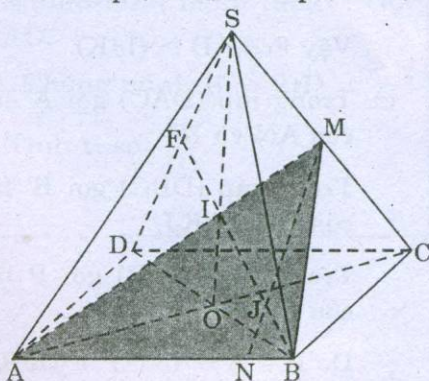
b) Xét mp (SBD) chứa SD thì BI là giao tuyến của mp (SBD) và mp (ABM).

Trong mp (SBD), BI cắt SD tại F thì
 $\{F\} = SD \cap \text{mp (ABM)}$.

Do I cũng là trọng tâm ΔSBD nên F là trung điểm SD.

c) Xét mp (MAB) chứa MN thì BI là giao tuyến của mp (MAB) và mp (SBD).

Trong mặt phẳng (MAB), MN cắt BI tại J thì J là giao điểm của MN và mp (SBD) ■



BT6. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

- Tìm giao điểm của CD và mặt phẳng (MNK).
- Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (MNK) và (ABD).

a) Xét mp (BCD) chứa CD.

Do NK không song song CD nên NK cắt CD tại I.

$$I \in NK \Rightarrow I \in (MNK)$$

Vậy $CD \cap (MNK)$ tại I.

b) Trong mp (ACD), MI cắt AD tại E.

$$\text{Ta có } K \in BD \Rightarrow K \in (ABD)$$

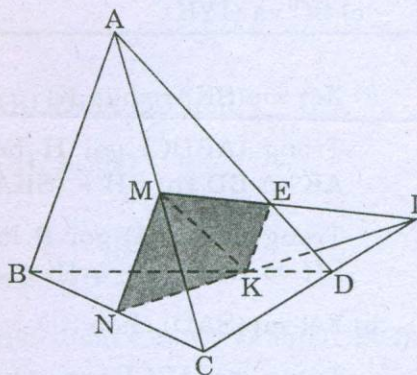
$$\text{và } K \in (MNK)$$

$$\text{Mặt khác: } E \in AD \Rightarrow E \in (ABD)$$

$$E \in MI \Rightarrow E \in (MNK)$$

$$\text{Vậy } EK = (MNK) \cap (ABD) \quad \blacksquare$$

Lưu ý : $I \in NK$ nên $I \in (MNK)$. Do đó $MI \in (MNK)$.



BT7. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trung điểm AC và BC. Trên BD lấy K sao cho $BK = 2KD$.

- Tìm giao điểm E của CD và mp (IJK).
- Tìm giao điểm F của AD và mp (IJK).
- Lấy M, N trên AB, CD. Tìm giao điểm của MN và mp (IJK).

- Trong mp (BCD) gọi E là giao điểm của CD và KJ thì $E = CD \cap (IJK)$.
- Trong mp (ACD) gọi F là giao điểm của EI và AD.

$$F \in EI \Rightarrow F \in (IJK)$$

$$\text{Vậy } F = AD \cap (IJK).$$

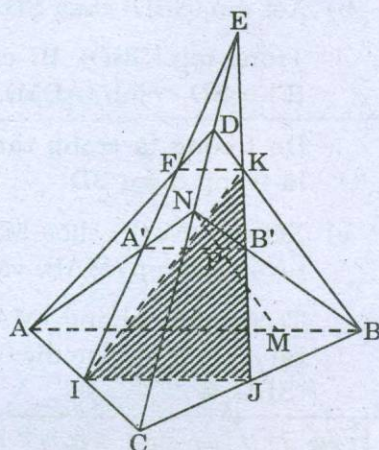
- c) Trong mp (DAC) gọi A' là giao điểm của AN và IF.

Trong mp (DBC) gọi B' là giao điểm của BN và KJ.

Trong mp (NAB) gọi P là giao điểm của A'B' và MN.

Do $P \in A'B'$ nên $P \in (IJK)$.

$$\text{Vậy } MN \cap (IJK) = P \blacksquare$$



BT8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình thang đáy lớn AB. Lấy I, Y, K lần lượt trên SA, AB, BC. Tìm giao điểm của:

a) IK và (SBD)

b) SD và (IYK)

c) SC và (IYK).

- a) Xét mp(SKA) chứa KI

Trong (ABDC) gọi H là giao điểm AK và BD thì $SH = (SKA) \cap (SBD)$

Trong mp(SAK) gọi P là giao điểm SH và IK thì $\{P\} = IK \cap (SBD)$.

- b) Xét mp(SAD) chứa SD

Trong mp(ABCD) gọi Q là giao điểm YK và AD thì $IQ = (SAD) \cap (IYK)$

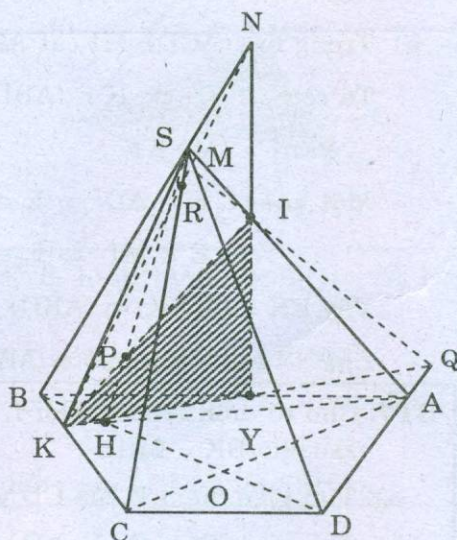
Trong mp(SAD) gọi M là giao điểm QI và SD thì $\{M\} = SD \cap (IYK)$.

- c) Xét mp(SBC) chứa SC

Trong mp(SAB) gọi N là giao điểm IY và SB thì $KN = (SBC) \cap (IYK)$

Trong mp(SBC) gọi R là giao điểm NK và SC thì

$$\{N\} = SC \cap (IYK) \blacksquare$$



BT9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm SB , G là trọng tâm $\triangle SAD$.

- Tìm giao điểm I của MG và mp $(ABCD)$. Chứng minh $IC = 2ID$.
- Tìm giao điểm J của AD và mp (OMG) . Tính tỉ số $\frac{JA}{JD}$.
- Tìm giao điểm K của SA và mp (OMG) .

- Gọi H và N lần lượt là trung điểm AD và SA .

Trên mp $(ABCD)$, BH cắt CD tại I .

Trên mp (SBH) , MG cắt BH tại I , thì I là giao điểm của MG và mp $(ABCD)$.

Ta có :

$I \in GM$ nên $I \in$ mp (MN, CD)

$I \in BH$ nên $I \in$ mp $(ABCD)$

Mà giao tuyến của mp (MN, CD) và mp $(ABCD)$ là CD nên $I \in CD$.

Do HD là đường trung bình của $\triangle IBC$ nên $IC = 2ID$.

- Xét mp $(ABCD)$ chứa AD .

Ta có OI là giao tuyến của mp (OMG) và mp $(ABCD)$.

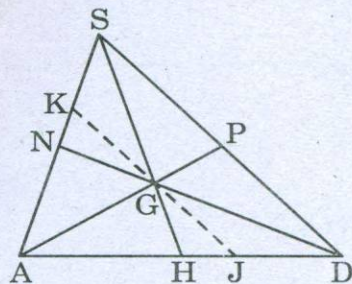
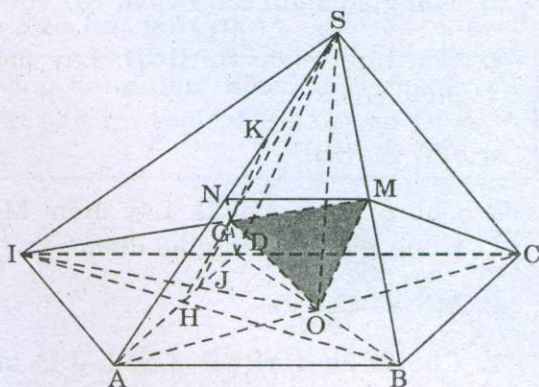
Trên mp $(ABCD)$, OI cắt AD tại J thì J là giao điểm của AD và mp (OMG) .

$\triangle AIC$ có IO và AD là hai đường trung tuyến nên J là trọng tâm $\triangle AIC$.

Vậy $\frac{JA}{JD} = 2$.

- Xét mp (SDA) chứa SA thì GJ là giao tuyến của mp (SAD) và mp (OMG) .

Trong mp (SAD) , GJ cắt SA tại K thì $\{K\} = SA \cap$ mp (OMG) ■



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện ABCD. Trên AC và AD lấy hai điểm M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi I là điểm bên trong $\triangle BCD$.
 - a) Tìm giao tuyến của (IMN) và (BCD).
 - b) Tìm giao điểm của BC và BD với (CMN).
2. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy điểm M trên SC, N trên BC. Tìm giao điểm của :
 - a) AM và (SBD).
 - b) SD và (AMN).
3. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm M, N trên AC, AD. Lấy O là điểm bên trong $\triangle BCD$. Tìm giao điểm của :
 - a) MN và (ABD).
 - b) OA và (BMN).
4. Cho tứ diện ABCD. Lấy I, J là hai điểm bên trong $\triangle ABC$ và $\triangle ABD$, M là điểm trên CD. Tìm giao điểm của IJ và (ABM).
5. Cho hình chóp S.ABCD có AD không song song với BC. Lấy K trên đoạn SB. Tìm giao điểm của :
 - a) BC và (SAD).
 - b) SC và (AKD).
6. Cho tứ diện S.ABC. Gọi I, H là trung điểm của SA, AB. Trên SC lấy điểm K sao cho $CK = 3KS$.
 - a) Tìm giao điểm của BC và (IHK).
 - b) Gọi M là trung điểm của IH. Tìm giao điểm của KM và (ABC).

CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp

Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó là ba điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt thì ba điểm này cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

BT1. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng nằm ngoài mặt phẳng (α) . Các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt mặt phẳng (α) tại D, E, F. Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

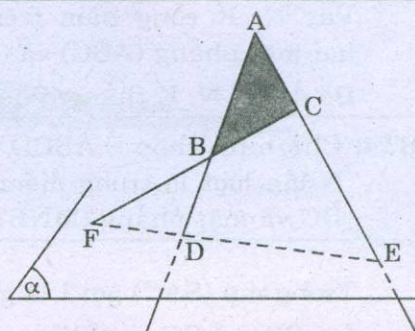
Ta có $F \in BC$ nên $F \in mp(ABC)$

$E \in AC$ nên $E \in mp(ABC)$

$D \in AB$ nên $D \in mp(ABC)$

Mà $D, E, F \in mp(\alpha)$

Vậy D, E, F $\in$ d là giao tuyến của $mp(\alpha)$ và $mp(ABC)$ ■



BT2. Cho tứ diện SABC. Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt AC tại K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Ta có $I \in AB \Rightarrow I \in mp(ABC)$

$I \in DE \Rightarrow I \in mp(DEF)$

$J \in BC \Rightarrow J \in mp(ABC)$

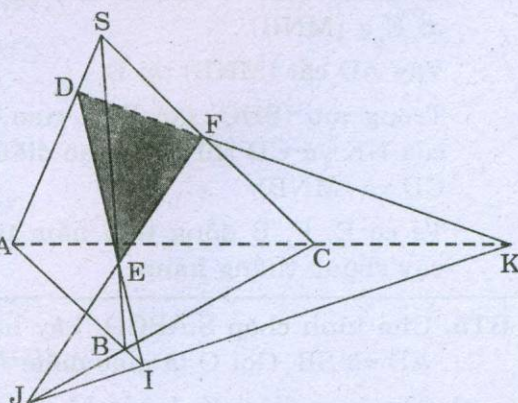
$J \in EF \Rightarrow J \in mp(DEF)$

$K \in AC \Rightarrow K \in mp(ABC)$

$K \in DF \Rightarrow K \in mp(DEF)$

Do đó ba điểm I, J, K cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) .

Vậy I, J, K thẳng hàng ■



BT3. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các cặp điểm A và A', B và B', C và C' sao cho BC cắt $B'C'$ tại M, CA cắt $C'A'$ tại N, AB cắt $A'B'$ tại I . Chứng minh ba điểm M, N, I thẳng hàng.

Xét hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$

Ta có $M \in BC \Rightarrow M \in (ABC)$

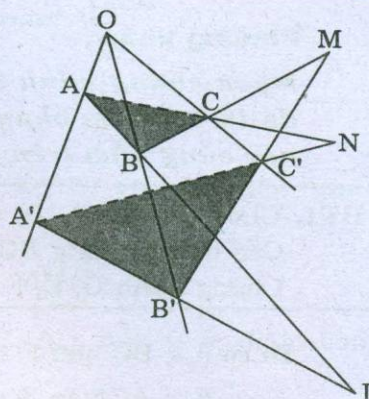
$M \in B'C' \Rightarrow M \in (A'B'C')$

Vậy M thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

Lập luận tương tự N và K cùng nằm trên hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

Vậy N, K cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$.

Do đó M, N, K thẳng hàng. ■



BT4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Tìm giao điểm E, F của DA, DC và mặt phẳng (MNB) . Chứng tỏ E, F, B thẳng hàng.

Trong mp (SAC) gọi I là giao điểm của SO và MN .

$I \in SO$ mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD)$.

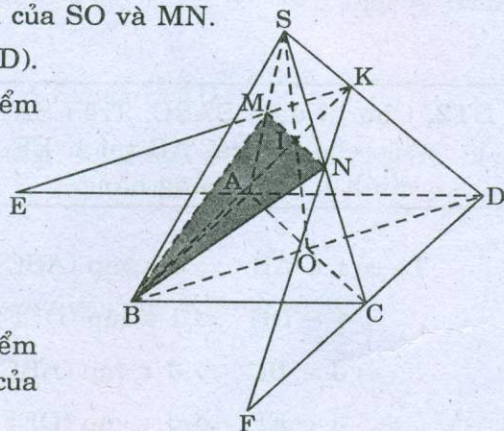
Trong mp (SBD) gọi K là giao điểm của BI và SD .

Trong mp (SAD) gọi E là giao điểm của MK và AD thì $E \in MK \Rightarrow E \in (MNB)$.

Vậy AD cắt (MNB) tại E .

Trong mp (SDC) gọi F là giao điểm của NK và CD thì F là giao điểm của CD và (MNB) .

Ta có E, F, B đồng thời nằm trên hai mặt phẳng (MNB) và $(ABCD)$, vậy chúng thẳng hàng.



BT5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy hai điểm I và J lần lượt nằm trên cạnh AD và SB . Gọi O là giao điểm AD và BC .

a) Tìm giao điểm K, L của IJ và DJ với mp (SAC) .

b) Gọi M là giao điểm SC và OJ . Chứng minh bốn điểm A, K, L, M thẳng hàng.

a) Trên mp (ABCD) gọi N là giao điểm của BI và AC.

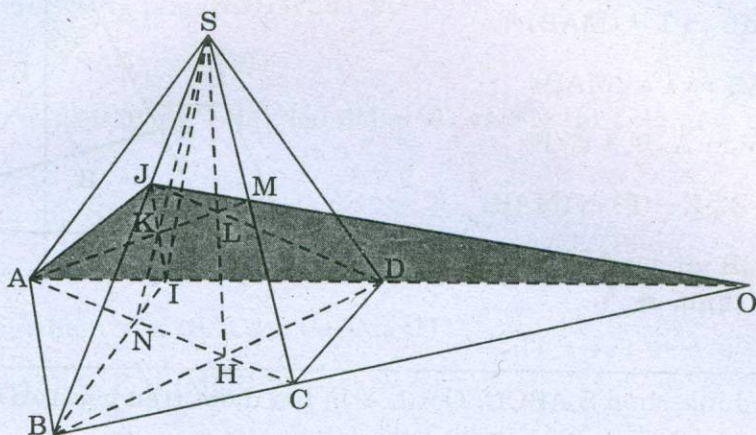
Xét mp (SBI) chứa IJ thì $SN = mp(SBI) \cap mp(SAC)$.

Trên mp (SBI), SN cắt IJ tại K thì $\{K\} = IJ \cap mp(SAC)$.

Trên mp (ABCD), gọi H là giao điểm của AC và BD.

Xét mp (SBD) chứa DJ thì $SH = mp(SBD) \cap mp(SAC)$.

Trên mp (SBD), SH cắt DJ tại L thì $\{L\} = DJ \cap_{mp} (SAC)$.



b) Trên mp (SBC), OJ cắt SC tại M.

Xét hai mặt phẳng (SAC) và (ADJ).

Hiển nhiên $A \in \text{mp}(\text{SAC}) \cap \text{mp}(\text{ADJ})$.

Ta có : $K \in \text{IJ} \Rightarrow K \in \text{mp}(\text{ADJ})$

$$K \in SN \Rightarrow K \in mp(SAC)$$

Vậy $K \in \text{mp}(\text{SAC}) \cap \text{mp}(\text{ADJ})$.

Ta có : $L \in \text{DJ} \Rightarrow L \in \text{mp}(\text{ADJ})$

$$L \in SH \Rightarrow L \in mp(SAC)$$

Vậy $L \in \text{mp (ADJ)} \cap \text{mp (SAC)}$.

Ta có : $M \in OJ \Rightarrow M \in mp(ADJ)$

$$M \in SC \Rightarrow M \in mp(SAC)$$

Vậy $M \in \text{mp (ADJ)} \cap \text{mp (SAC)}$.

Do đó A, K, L, M thẳng hàng vì cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (ADJ). ■

BT6. Cho hai điểm cố định A, B nằm ngoài mặt phẳng (P) sao cho AB không song song (α) . Lấy M di động trong không gian sao cho MA, MB cắt (α) tại A', B' . Chứng minh $A'B'$ luôn đi qua 1 điểm cố định.

Gọi I là giao điểm AB và (α) thì I cố định

Xét $mp(P)$ và $mp(MAB)$

$$I \in MA \Rightarrow I \in (MAB)$$

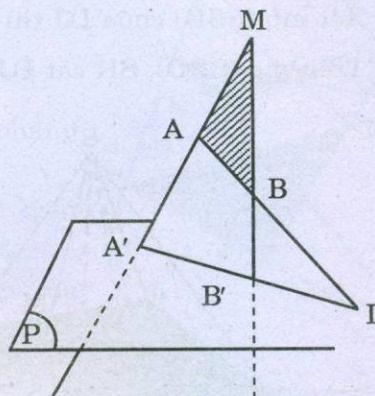
$$I \in MB \Rightarrow I \in (MAB)$$

$$I \in AB \Rightarrow I \in (MAB)$$

Hiển nhiên $A, B, I \in (P)$

Vậy $A', B', I \in (P) \cap (MAB)$

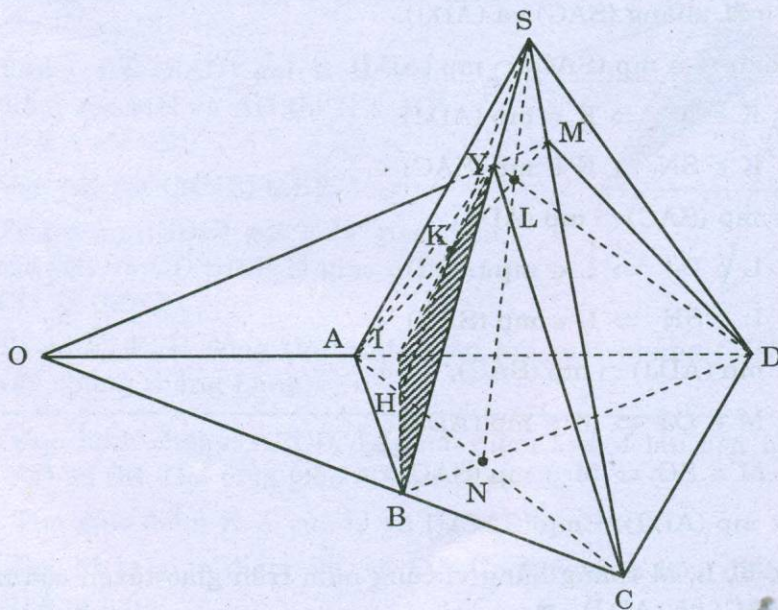
Do đó $A'B'$ di động nhưng luôn qua I cố định. ■



BT7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I, Y là hai điểm trên cạnh AD và SB .

a) Tìm giao điểm K, L của IY và DY với $mp(SAC)$

b) AD cắt BC tại O, OY cắt CS tại M . Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.



a) Trên (ABCD) gọi H là giao điểm AC và BI

Xét mặt phẳng phụ (SBI) chứa IY

Dễ thấy $SH = (SBI) \cap (SAC)$

Trong mp(SBI) gọi K là giao điểm IY và SH thì K là giao điểm IY và (SAC)

• Trong mp(ABCD) gọi N là giao điểm BD và AC

Xét mặt phẳng phụ (SDB) chứa YD

Thì $SN = (SAC) \cap (SBD)$

Trong mp(SBD) gọi L là giao điểm YD và SN thì L là giao điểm DY và (SAC)

b) Xét hai mp(SAC) và (ODM)

• Hiển nhiên $M \in (SAC) \cap (ODM)$

• Hiển nhiên $A \in (SAC) \cap (ODM)$ (1)

• $K \in AM \Rightarrow K \in (MOD)$ (2)

$K \in SH \Rightarrow K \in (SAC)$

Vậy $K \in (SAC) \cap (MOD)$ (3)

• $L \in SN \Rightarrow L \in (SAC)$

$L \in DY \Rightarrow L \in (MOD)$

Vậy $L \in (SAC) \cap (MOD)$ (4)

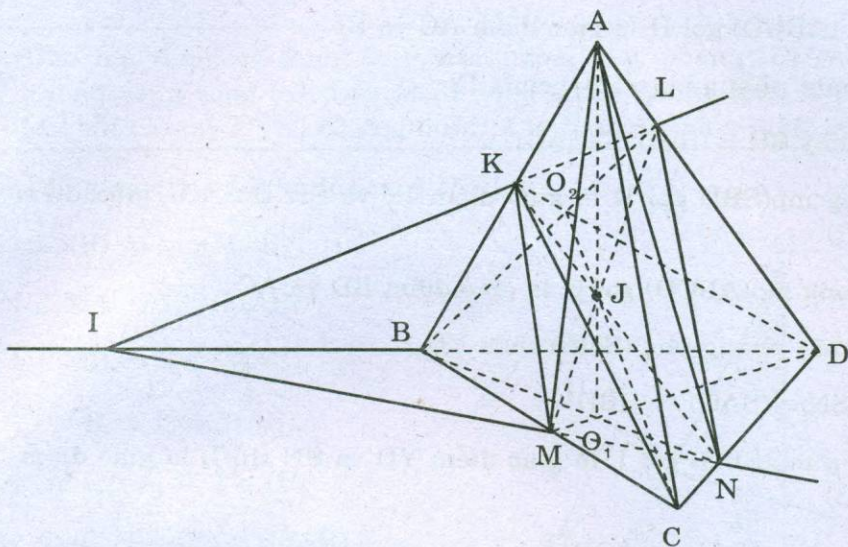
Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow M, A, K, L \in (MOD) \cap (SAC)$

Vậy A, K, L, M thẳng hàng. ■

BT8. Cho tứ diện ABCD và lấy I trên BD nối dài. Vẽ đường thẳng qua I cắt BC, CD tại M, N. Vẽ đường thẳng qua I cắt AB, AD tại K, L. Gọi O_1 là giao điểm BN và DM. Gọi O_2 là giao điểm BL và DK. Gọi J là giao điểm ML và DN. Chứng minh ba điểm sau đây thẳng hàng

a) A, J, O_1

b) C, J, O_2 .



a) Xét hai mp(ABN) và (AMD)

- Dĩ nhiên $A \in (ABN) \cap (AMD)$
- $\left. \begin{array}{l} O_1 \in MD \Rightarrow O_1 \in (AMD) \\ O_1 \in NB \Rightarrow O_1 \in (ABN) \end{array} \right\} \Rightarrow O_1 \in (AMD) \cap (ABN)$
- $\left. \begin{array}{l} J \in ML \Rightarrow J \in (MAD) \\ J \in (AO_1) \Rightarrow J \in (ABN) \end{array} \right\} \Rightarrow J \in (AMD) \cap (ABN)$

Vậy $A, J, O_1 \in (ABN) \cap (AMD)$

$\Rightarrow A, J, O_1$ thẳng hàng.

b) Xét hai mp(KCD) và (BLC)

- Dĩ nhiên $C \in (KCD) \cap (BLC)$
- $\left. \begin{array}{l} O_2 \in BL \Rightarrow O_2 \in (BLC) \\ O_2 \in KD \Rightarrow O_2 \in (KCD) \end{array} \right\} \Rightarrow O_2 \in (BLC) \cap (KCD)$
- $\left. \begin{array}{l} J \in KN \Rightarrow J \in (KCD) \\ J \in LM \Rightarrow J \in (LBC) \end{array} \right\} \Rightarrow J \in (KCD) \cap (BLC)$

Vậy $C, O_2, J \in (KCD) \cap (BLC)$

$\Rightarrow C, O_2, J$ thẳng hàng ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm I trên BD sao cho D nằm giữa I và B. Trong mặt phẳng (ABD) vẽ đường thẳng qua I cắt đoạn AB, AD tại K và L. Trong mặt phẳng (BCD) vẽ đường thẳng qua I cắt đoạn CD, CB tại M và N. Giả sử BN cắt DM tại O, BL cắt DK tại H, LM cắt KN tại J. Chứng minh ba điểm A, J, O thẳng hàng và ba điểm C, J, H thẳng hàng.
2. Cho tứ diện ABCD. Gọi O là trọng tâm của $\triangle ACD$. Lấy M, N, P trên AB, AC, AD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của MN với BC, MP với BD.
 - a) Chứng minh MG, PI, NJ đồng phẳng.
 - b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD, NI. H là giao điểm của MG với BE, K là giao điểm của GF với (BCD). Chứng minh H, K, I, J thẳng hàng.
3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm của SA, SC.
 - a) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAB), (SBC).
 - b) Tìm giao điểm I, K của SO, SD với (MNP).
 - c) Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAD) và (SDC).
 - d) Tìm giao điểm E, F của DA, DC với (MNP). Chứng tỏ E, B, F thẳng hàng.
4. Cho hai mặt phẳng (α) , (β) có giao tuyến a, d là đường thẳng cắt (α) tại A, cắt (β) tại B. Trên d lấy hai điểm cố định $S_1, S_2 (\neq A)$. Lấy M di động trên (β) . MS_1, MS_2 cắt (α) tại M_1, M_2 .
 - a) Chứng minh M_1M_2 qua một điểm cố định.
 - b) a cắt M_1M_2 tại K. Chứng minh K, M, B thẳng hàng.
5. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Lấy A, B trên (P) ($A, B \notin d$) và $O \notin (P)$ và (Q). Hai đường thẳng OA, OB cắt (Q) tại A_1, B_1 và AB cắt d tại O. Chứng minh O, A, B không thẳng hàng.

Chủ đề 4

CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Phương pháp

Muốn chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta :

- Tìm giao điểm I của d_1 và d_2 .
- Tìm hai mặt phẳng phân biệt mà có d_3 là giao tuyến. Chứng minh I là điểm chung của hai mặt phẳng này.

BT1. Cho tứ diện ABCD. Lấy ba điểm E, F, G lần lượt trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh ba đường thẳng CD, IG và HF đồng quy.

Trên mặt phẳng (EFG), gọi O là giao điểm của IG và HF.

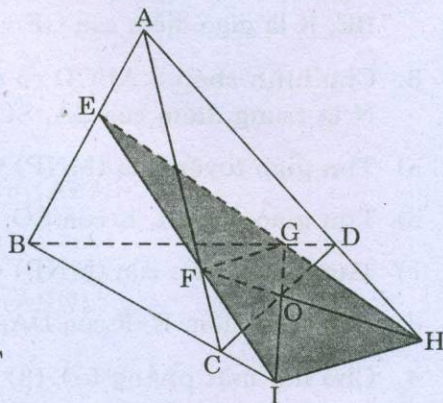
Ta có CD là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Ta có : $O \in IG \Rightarrow O \in mp(BCD)$

$O \in FH \Rightarrow O \in mp(ACD)$

Vậy $O \in CD = mp(BCD) \cap mp(ACD)$.

Do đó ba đường thẳng CD, IG và HF đồng quy tại O ■



BT2. Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. Mặt phẳng (α) di động qua IJ cắt SC, SD lần lượt tại M và N.

- Chứng minh IJ, MN, SE đồng quy.
- Chứng minh giao điểm của IM và JN chuyển động trên một đường thẳng cố định.

a) Trong mp (α) : IJ cắt NM tại K

Ta có : $SE = (SAB) \cap (SCD)$

Mà $IJ \subset (SAB)$ và $NM \subset (SCD)$

Vậy $IJ \cap NM = \{K\} \in SE$

Do đó IJ, MN, SE đồng quy tại K.

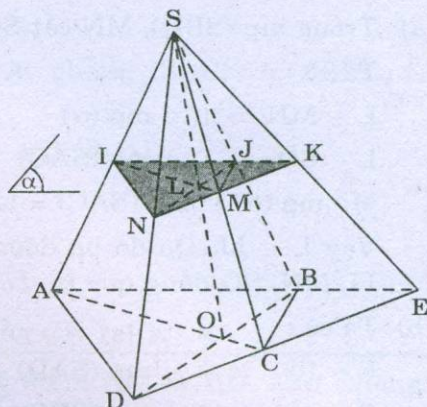
- b) Gọi L là giao điểm của IM và JN
 Gọi O là giao điểm của AC và BD

Ta có : $SO = (SAC) \cap (SBD)$

Ta có : $L \in IM \Rightarrow L \in (SAC)$

$L \in JN \Rightarrow L \in (SBD)$

Vậy khi (α) di động qua IJ thì L di động trên đường thẳng cố định SO . ■



BT3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD . Trên cạnh SC lấy điểm E không trùng với S và C .

- a) Tìm giao điểm F của SD và mp (ABE) .
 b) Chứng minh ba đường thẳng AB , CD và EF đồng quy.

- a) Trong mp $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC và BD .

Trong mp (SAC) : SO cắt AE tại I .

Trong mp (SBD) : BI cắt SD tại F .

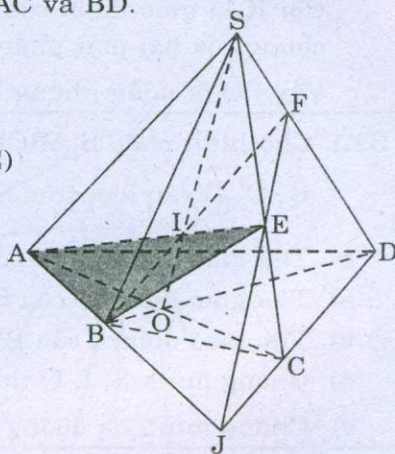
Ta có $F \in BI$ mà $BI \in (ABE) \Rightarrow F \in (ABE)$

Vậy $SD \cap (ABE)$ tại F .

- b) Trên mp $(ABCD)$ do AB và CD không song song nên cắt nhau tại J .

Xét hai mặt phẳng (ABE) và (SCD) ta thấy ba điểm E , F , J đồng thời nằm trên hai mặt phẳng trên vậy chúng phải nằm trên giao tuyến.

Do đó ba đường thẳng AB , CD và EF đồng quy tại J . ■



BT4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có O là giao điểm AC và BD . Lấy hai điểm cố định I trên SA sao cho $SI > SA$, J trên SC sao cho $SJ < JC$. Gọi (α) là mặt phẳng di động quanh IJ , (α) cắt SB tại M , cắt SD tại N .

- a) Chứng minh ba đường thẳng IJ , MN và SO đồng quy.
 b) AD cắt BC tại E , IN cắt MJ tại F . Chứng minh ba điểm S , E , F thẳng hàng.
 c) IN cắt AD tại P , MJ cắt BC tại Q . Chứng minh PQ luôn đi qua một điểm cố định.

- a) Trong mp (SBD), MN cắt SO tại L.

Ta có :

$$L \in MN \Rightarrow L \in mp(\alpha)$$

$$L \in SO \Rightarrow L \in mp(SAC)$$

$$\text{Mà } mp(\alpha) \cap mp(SAC) = IJ.$$

Vậy $L \in IJ$. Do đó ba đường thẳng IJ, MN, SO đồng quy tại L.

- b) Ta có :

$$F \in IN \Rightarrow F \in mp(SAD)$$

$$F \in MJ \Rightarrow F \in mp(SBC)$$

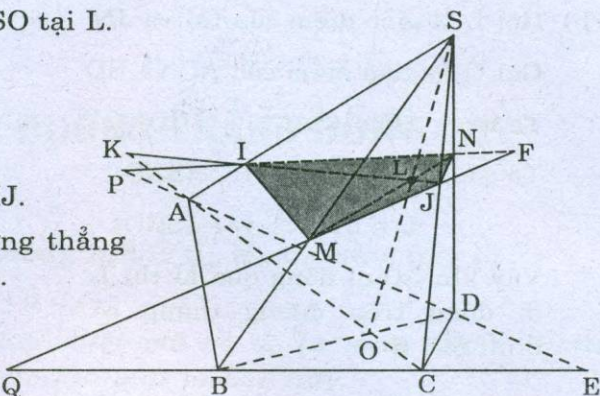
Mà $SE = mp(SAD) \cap mp(SBC)$. Vậy $F \in SE$. Do đó S, E, F thẳng hàng.

- c) Do $SI > SA$ và $SJ < JC$ nên $\frac{SI}{SA} > 1 > \frac{SJ}{JC}$

Vậy IJ không song song AC.

Gọi K là giao điểm của AC và IJ thì K cố định. Ta có P, Q, K là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và mp (ABCD) nên P, Q, K thẳng hàng.

Vậy PQ di động nhưng luôn qua điểm K cố định ■



BT5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Lấy

$$B', C', D' \text{ lần lượt trên } SB, SC, SD \text{ sao cho } \frac{SB'}{SB} = \frac{1}{3}, \frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3}, \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2}.$$

- Tìm giao điểm M, N của BC và CD với $(B'C'D')$.
- Tìm giao điểm A' của SA với $(B'C'D')$.
- Tìm giao điểm I của B'D' với (SAC).
- Chứng minh S, I, O thẳng hàng.
- Chứng minh ba đường thẳng MN, AD và A'D' đồng quy

- a) Trong mp (SBC), B'C' cắt BC tại M

thì $M = BC \cap (B'C'D')$.

Trong mp (SCD), C'D' cắt CD tại N

thì $N = CD \cap (B'C'D')$.

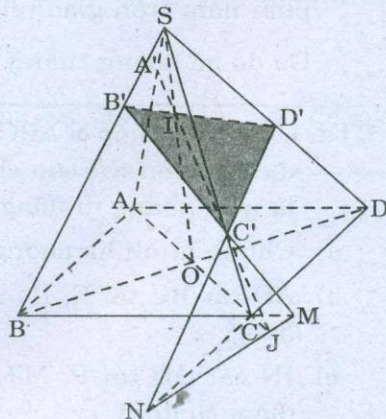
- b) Trong mp (ABCD), MN cắt AC tại J.

Trong mp (SAC), JC' cắt SA tại A'

thì $A' = SA \cap (B'C'D')$.

- c) Trong mp (SBD), B'D' cắt SO tại I.

Do $I \in SO$ nên $I \in mp(SAC)$



Vậy $I = B'D' \cap (SAC)$.

d) Ba điểm S, I, O cùng nằm trên hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) nên chúng thẳng hàng.

e) Trong mp (SAD), gọi K là giao điểm của $A'D'$ và AD.

Ta có $MN = (B'C'D') \cap (ABCD)$

$K \in A'D' \Rightarrow K \in (B'C'D')$

$K \in AD \Rightarrow K \in (ABCD)$

Vậy $K \in MN$. Do đó $A'D'$, AD và MN đồng quy tại K ■

BT6. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi O là giao điểm AC và BD. Mặt phẳng (α) cắt SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D'. Giả sử AB cắt CD tại E', A'B' cắt C'D' tại E'. Chứng minh:

a) S, E, E' thẳng hàng.

b) $A'C'$, $B'D'$, SO đồng quy.

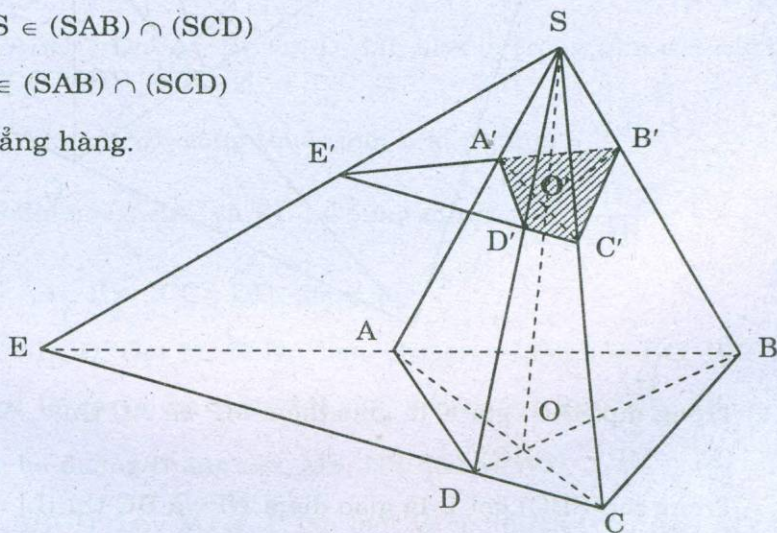
a) Ta có: $\{E\} = BN \cap CD \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD)$

$\{E'\} = A'B' \cap C'D' \Rightarrow E' \in (SAB) \cap (SCD)$

Hiển nhiên: $S \in (SAB) \cap (SCD)$

Vậy E, E', S $\in (SAB) \cap (SCD)$

$\Rightarrow E, E', S$ thẳng hàng.



b) Dễ dàng thấy: $SO = (SAC) \cap (SBD)$

Gọi O' là giao điểm $A'O'$ và $B'D'$

Ta có: $O' \in A'C' \Rightarrow O' \in (SAC)$

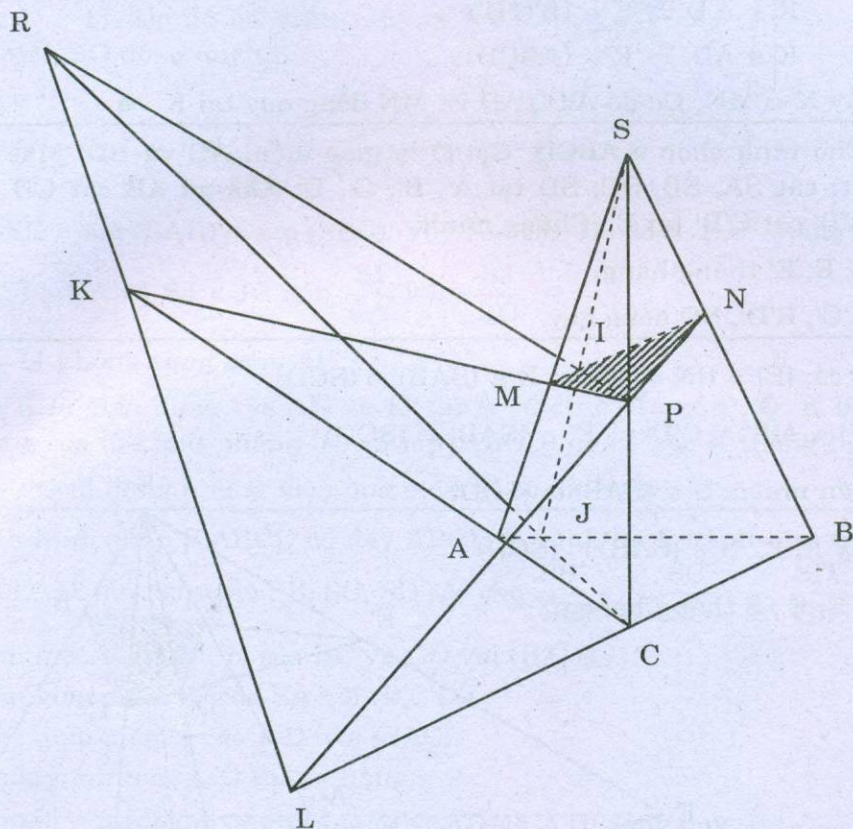
$O' \in B'D' \Rightarrow O' \in (SB'D')$

Vậy $C' \in SO$

Do đó: SO, $A'C'$, $B'D'$ đồng quy tại C'. ■

BT7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA < SB < SC$. Trên SA, SB, SC lấy M, N, P sao cho $SM = SN = SP$.

- Tìm giao điểm K của MP và (ABC) , giao điểm L của CB và (MNP) .
- Lấy điểm I trên MN . Gọi J là giao điểm của SI và AB . Chứng minh KL, PI, CJ đồng quy.



a) Trong mp(SAC) gọi K là giao điểm MP và AC thì

$$\{K\} = MP \cap (ABC)$$

Trong mp(SBC) gọi L là giao điểm NP và BC thì $\{L\} = BC \cap (MNP)$

b) Dễ dàng thấy $LK = (MNP) \cap (ABC)$

Trong mp(SJC) gọi R là giao điểm IP và JC

Ta có $R \in IP \Rightarrow R \in (MNP)$

$R \in JC \Rightarrow R \in (ABC)$

Vậy $R \in LK = (MNP) \cap (ABC)$

Do đó ba đường thẳng KL, PI, CJ đồng quy tại R . ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ADB, ABC. Chứng minh AA', BB', CC' đồng quy.
2. Cho tứ diện S.ABC. Qua C dựng mặt phẳng (α) cắt AB, SB tại B₁, B'. Qua B dựng mặt phẳng (β) cắt AC, SC tại C₁, C'. BB' cắt CC' tại O, BB₁ cắt CC₁ tại O₁. Giả sử OO₁ kéo dài cắt SA tại I. Chứng minh :
 - a) AO₁, SO', BC đồng quy.
 - b) I, B₁, B' thẳng hàng và I, C₁, C' thẳng hàng.
3. Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, AD và BC kéo dài cắt nhau tại F, AD < AF. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB. Mặt phẳng (α) di động qua I, J cắt SC, SD tại M, N.
 - a) Chứng minh IJ, MN, SE đồng quy.
 - b) Khi (α) di động thì giao điểm của IM và JN di động trên đường nào ?
4. Cho tứ diện ABCD. Gọi A₁, B₁, C₁, D₁ lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ADB, ABC.
 - a) Chứng minh AA₁ và BB₁ cùng thuộc một mặt phẳng.
 - b) Gọi I là giao điểm của AA₁ và BB₁. Chứng minh $\frac{IA_1}{IA} = \frac{IB_1}{IB} = \frac{1}{3}$.
 - c) Chứng minh AA₁, BB₁, CC₁, DD₁ đồng quy.
5. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD. Lấy R, S lần lượt là các điểm trên AD, AC sao cho $AR = \frac{AD}{3}$, $AS = \frac{AC}{3}$. Chứng minh ba đường thẳng AB, MS, NR đồng quy.
6. Cho tứ diện ABCD. Lấy M, N, P lần lượt là các điểm trên AB, AC, BD. MN cắt BC tại I, MP cắt AD tại J. Chứng minh ba đường thẳng PI, NJ, CD đồng quy.
7. Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng (P) không chứa AB và CD cắt AC, BD, BC, AD tại M, N, R, S. Chứng minh ba đường thẳng sau đồng quy :
 - a) AB, MR, NS.
 - b) CD, MS, NR.

Chủ đề 5

TÌM MẮT CẮT CỦA MẮT PHẪNG (α) VÀ HÌNH CHÓP

Phương pháp

- Từ một điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của mp (α) với một mặt của hình chóp (gọi là giao tuyến gốc).
- Tìm các giao điểm của giao tuyến này với các cạnh của mặt đó, từ các giao điểm này xác định các giao tuyến mới với các mặt còn lại.
- Tiếp tục đến khi nào các đoạn giao tuyến khép kín ta được mặt cắt (hay thiết diện).

BT1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang có hai đáy AB, CD và $AB > CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ và mp (AMN) .

Trong mp (ABCD) : AD cắt BC tại I.

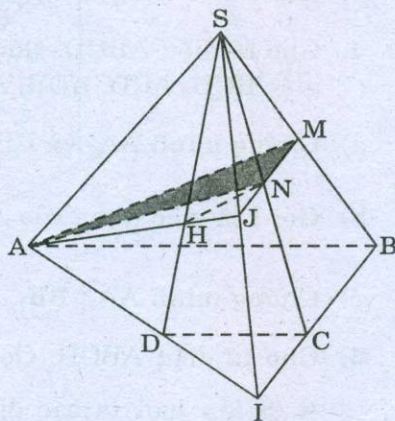
Trong mp (SBI) : MN cắt SI tại J là trung điểm của SI.

Trong mp (SAD) : AJ cắt SD tại H.

Ta có : $(SBC) \cap (AMN) = MN$

$$(\text{SCD}) \cap (\text{AMN}) = \text{NH}$$
$$(\text{SAD}) \cap (\text{AMN}) = \text{HA}$$
$$(SAB) \cap (AMN) = AM$$

Vậy thiết diện là tứ giác AMNH. ■



BT2. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh đều bằng a. Kéo dài BC một đoạn CE = a, kéo dài BD một đoạn DF = a. Gọi M là trung điểm AB.

- Tìm mật cắt của mp (MEF) và tứ diện.
- Tính diện tích của thiết diện này.

- a) Trong mp (ABC), ME cắt AC tại H. Trong mp (ABD), MF cắt AD tại K.
Thiết diện là tam giác MHK.

b) $\triangle MBE \Rightarrow ME^2 = MB^2 + BE^2 - 2MB \cdot BE \cdot \cos 60^\circ$
 $\Rightarrow ME^2 = \frac{a^2}{4} + 4a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right) \cdot 2a \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13a^2}{4}$

$\triangle ABE$ có H là trọng tâm nên

$$MH = \frac{1}{3}ME = \frac{a\sqrt{13}}{6}$$

Ta có: $\triangle MBE = \triangle MBF$ (c.g.c)

$$\Rightarrow ME = MF = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

và $MH = MK$

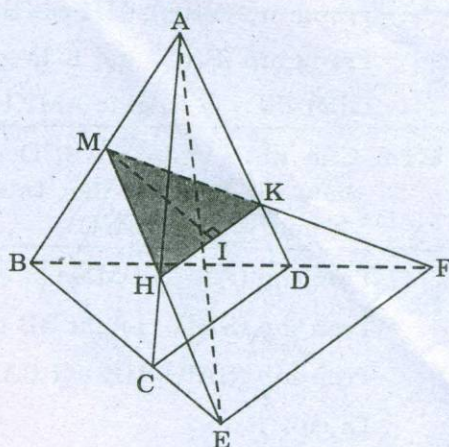
Ta có: $\frac{MH}{ME} = \frac{MK}{MF} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK \parallel EF$

$$\Rightarrow \frac{HK}{EF} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{2a}{3}$$

Vẽ $MI \perp HK$

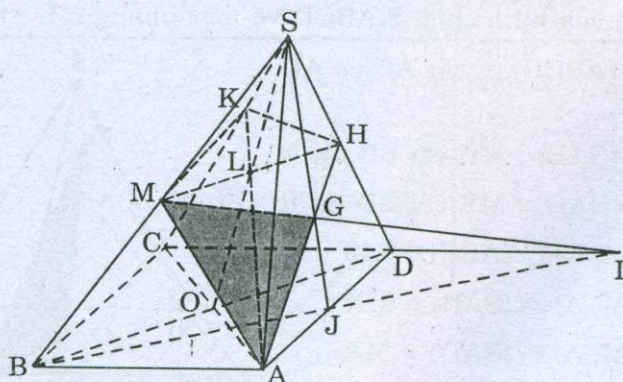
$$\triangle MIH \text{ vuông} \Rightarrow MI^2 = MH^2 - \frac{HK^2}{4} = \frac{13a^2}{36} - \frac{a^2}{9} = \frac{9a^2}{36} = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Vậy: } dt(\triangle MHK) = \frac{1}{2}MI \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^2}{6} \quad \blacksquare$$



BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAD$.

- Tìm giao điểm I của GM và mp (ABCD).
- Tìm thiết diện của hình chóp và mp (AGM).



- Gọi J và H lần lượt là trung điểm AD và SD.

Trên mp (SBJ), MG cắt BJ tại I thì $I = MG \cap mp(ABCD)$.

b) Hiển nhiên : $mp(AGM) \cap mp(SAB) = AM$

$mp(AGM) \cap mp(SAD) = AH$

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Trong mp (SBD), MH cắt SO tại L.

Trong mp (SAC), gọi K là giao điểm AL và SC.

Thiết diện là tứ giác AMKH ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Lấy ba điểm M, N, I lần lượt trên AD, CD, SO. Tìm mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng (MNI).

Trên mp (ABCD), MN cắt BC tại R, cắt AB tại K, cắt DB tại J.

Trên mp (SBD), IJ cắt SB tại H.

Trên mp (SAB), HK cắt SA tại P.

Ta có :

mp (MNI) cắt mp (ABCD) theo đoạn MN

mp (MNI) cắt mp (SAD) theo đoạn MP

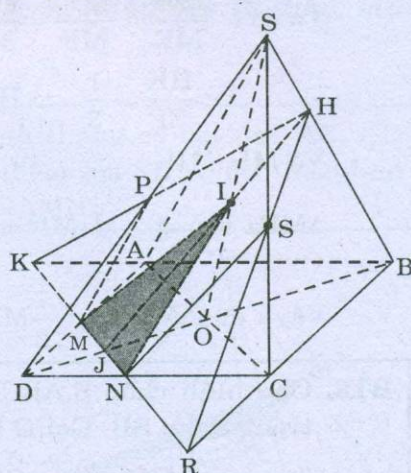
mp (MIN) cắt mp (SAB) theo đoạn HP

Trong mp (SBC), RH cắt SC tại S thì

mp (MNI) cắt mp (SBC) theo đoạn HS.

Vậy mp (MNI) cắt (SCD) theo đoạn SN.

Do đó mặt cắt là ngũ giác MNSHP ■



BT5. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Gọi M là trung điểm SA. Gọi Δ là đường thẳng song song với BD, Δ cắt BC và CD tại I và J. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD và mặt phẳng (M, Δ).

Trong mp (ABCD), Δ cắt AB và AD tại H và K.

Trong mp (SAB) : MH cắt SB tại N

Trong mp (SAD) : MK cắt SD tại R

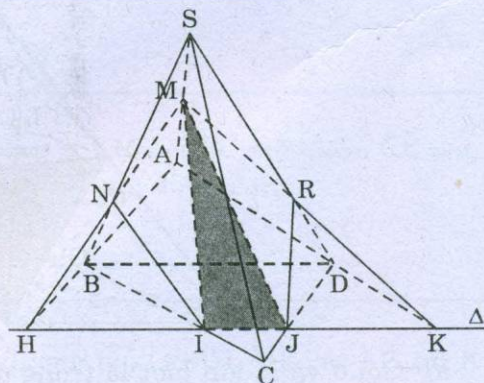
Ta có : $(M, \Delta) \cap (ABCD) = IJ$

$(M, \Delta) \cap (SAB) = MN$

$(M, \Delta) \cap (SAD) = MR$

$(M, \Delta) \cap (SDC) = RJ$

Do đó thiết diện là ngũ giác INMRJ ■



BT6. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy N trên cạnh BC ($N \neq B, C$). Lấy K và L lần lượt là hai điểm thuộc miền trong của tam giác SAB và SCD. Xác định mặt cắt của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (NKL) và hình chóp.

Trong mp (SAB), SK cắt AB tại K'.

Trong mp (SCD), SL cắt CD tại L'.

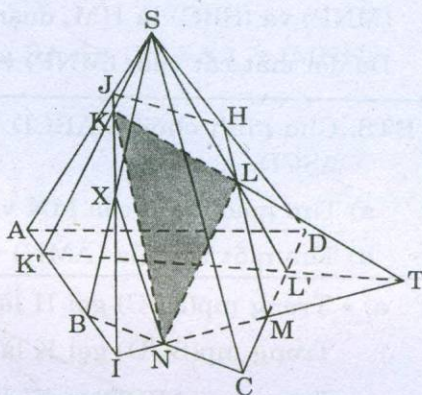
Trong mp (SKL), KL cắt K'L' tại T.

Trong mp (ABCD), TN cắt CD tại M, cắt AB tại I.

Trong mp (SAB), IK cắt SA tại J,
cắt SB tại X.

Trong mp (SCD), ML cắt SD tại H.

Mặt cắt của (NKL) và hình chóp
S.ABCD là ngũ giác MNXJH ■



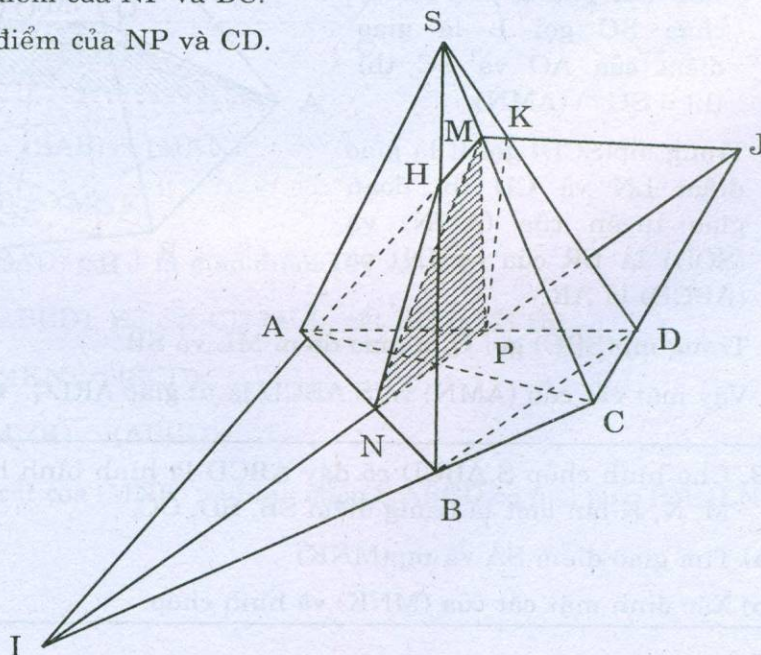
BT7. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy M trên SC. Gọi N, P lần lượt là trung điểm AB và AD. Tìm mặt cắt của hình chóp và mp(MNP).

Đoạn giao tuyến gốc của (MNP) và (ABCD) là NP

Trong mp(ABCD)

Gọi I là giao điểm của NP và BC .

Gọi J là giao điểm của NP và CD .



Do đó: mặt cắt của (MNP) và chóp (S.ABCD) là ngũ giác NPKMH. ■

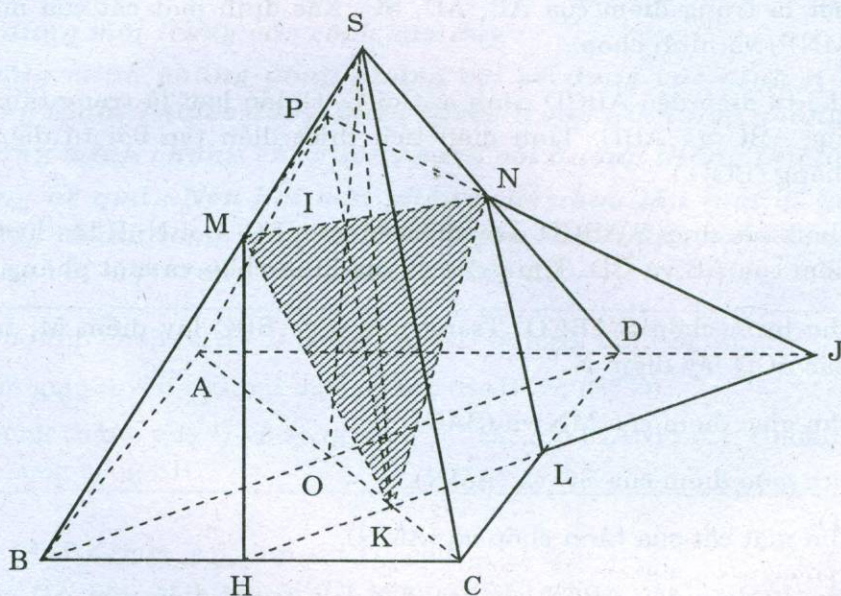
a) Trong mp(SBD)

Gọi I là giao điểm MN và SC

Xét mặt phẳng phụ (SAC) chứa SA thì

$$KI = (SAC) \cap (MNK)$$

Trong mp(SAC) gọi P là giao điểm KI và SA thì $\{P\} = SA \cap (MNK)$



b) Ta có $MP = (SAB) \cap (MNK)$

$$PN = (SAD) \cap (MNK)$$

Trong mp(SAD) gọi J là giao điểm PN và AD

Trong mp(ABCD): KJ cắt CD tại L, cắt BC tại H thì

$$NL = (MKN) \cap (SCD)$$

$$\text{và } HK = (MNK) \cap (ABCD)$$

Do đó mặt cắt của (MNK) và hình chóp S.ABCD có ngũ giác PMHLN. ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC . Lấy N trên AB sao cho $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{4}$. Xác định mặt cắt của (MNP) và hình chóp.
2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC . Xác định mặt cắt của mặt phẳng (MNP) và hình chóp.
3. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD . Tính diện tích thiết diện tạo bởi tứ diện và mặt phẳng (BGG') .
4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy điểm M trên SC . Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng (MNP) .
5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Trong tam giác SBC lấy điểm M , trong tam giác SCD lấy điểm N .
 - a) Tìm giao điểm của MN và (SAC) .
 - b) Tìm giao điểm của SC và (AMN) .
 - c) Tìm mặt cắt của hình chóp và (AMN) .
6. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi I là trung điểm của AD , J là điểm đối xứng của D qua C , K là điểm đối xứng của D qua B . Xác định và tính diện tích mặt cắt của tứ diện và (IJK) .
7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, CD, OC .
 - a) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAC) . Tìm giao điểm của SA và (MNP) .
 - b) Xác định mặt cắt của hình chóp $S.ABCD$ và (MNP) . Tính tỉ số mà (MNP) chia các cạnh SA, BC, CD .

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Định nghĩa : Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song

Sử dụng một trong các cách sau đây :

1. Chứng minh chúng đồng phẳng rồi sử dụng các định lý đường trung bình, Thalès đảo... quen thuộc trong hình học phẳng.
2. Chứng minh chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.
3. Dùng hệ quả : Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

BT1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).
- Đường thẳng qua D và song song SC cắt mp (SAB) tại I. Chứng minh AI song song SB.

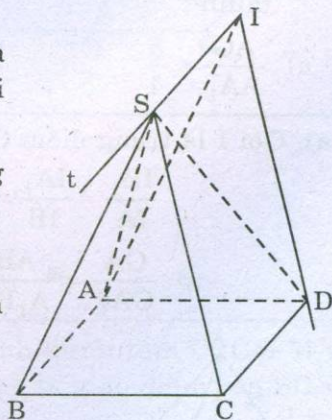
- a) Mp (SAB) chứa AB, mp (SCD) chứa CD mà $AB \parallel CD$ nên $St = mp(SCD) \cap mp(SAB)$ với $St \parallel AB \parallel CD$.
- b) Trong mp (SCD), đường thẳng qua D và song song SC cắt St tại I.

$$\text{Do } St \subset \text{mp. (SAB)} \Rightarrow I \in \text{mp (SAB)}.$$

Ta có $SI \parallel CD$ và $SC \parallel DI$ nên $SIDC$ là hình bình hành. Do đó : $SI \parallel = CD$.

Mà $CD \parallel AB$ nên $SI \parallel AB$

Tứ giác SIAB là hình bình hành nên $AI \parallel SB$ ■



BT2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB song song CD và $AB > CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB.

- Chứng minh MN song song CD.
- Tìm giao điểm J của SC và mp (ADN).
- AN và DJ cắt nhau tại I. Chứng minh $SI \parallel AB$ và $SA \parallel IB$.

b) Tương tự, gọi $G' = AA_1 \cap DD_1$, ta có : $\frac{G'A}{AA_1} = \frac{3}{4}$ (2)

Tương tự, gọi $G'' = AA_1 \cap CC_1$, ta có : $\frac{G''A}{AA_1} = \frac{3}{4}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{G'A}{AA_1} = \frac{G''A}{AA_1} = \frac{GA}{AA_1} \Rightarrow G \equiv G' \equiv G'' \blacksquare$

BT4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy M, N, P , Q lần lượt trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel SB$, $NP \parallel CD$, $MQ \parallel AB$.

a) Chứng minh $PQ \parallel SA$.

b) Gọi K là giao điểm MN và PQ . Chứng minh $SK \parallel AD \parallel BC$.

a) Do $MQ \parallel AB \Rightarrow \frac{DQ}{DA} = \frac{CM}{CB}$ (1)

Do $MN \parallel SB \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CS}$ (2)

Do $NP \parallel CD \Rightarrow \frac{CN}{CS} = \frac{DP}{DS}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{DQ}{DA} = \frac{DP}{DS}$

$\Rightarrow PQ \parallel SA$.

b) Mp (SAD) và (SBC) đã có chung điểm S .

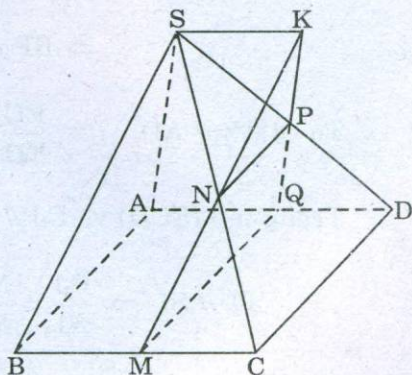
$K \in NM \Rightarrow K \in (SBC)$

$K \in PQ \Rightarrow K \in (SAD)$

Vậy $SK = (SAD) \cap (SBC)$

Ta có $AD \subset (SAD)$, $BC \subset (SBC)$, mà $AD \parallel BC$

Vậy $SK = (SAD) \cap (SBC)$ thì $SK \parallel AD \parallel BC \blacksquare$



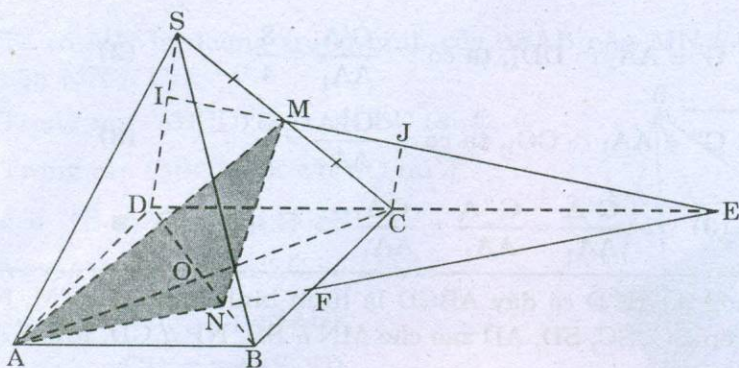
BT5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SC và OB . Gọi I là giao điểm của SD và mp (AMN). Tính tỉ số $\frac{SI}{ID}$.

• Trong mp ($ABCD$), gọi E và F là giao điểm của AN với CD và BC .

Trong mp (SCD), gọi I là giao điểm của EM và SD .

$I \in ME \Rightarrow I \in mp$ (AMN)

Vậy I là giao điểm của SD và mp (AMN).



• Ta có $BF \parallel AD \Rightarrow \frac{BF}{AD} = \frac{NB}{ND} = \frac{\frac{1}{2}OB}{OD + \frac{1}{2}OB} = \frac{\frac{1}{2}OB}{\frac{3}{2}OB} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow BF = \frac{1}{3}AD \Rightarrow CF = \frac{2}{3}AD$$

Ta có $CF \parallel AD \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{CF}{AD} = \frac{2}{3}$

Trong mp (SCD) vẽ $CJ \parallel SD$ ($J \in EI$). Ta có $\frac{JC}{ID} = \frac{EC}{ED} = \frac{2}{3}$ (1)

$JC \parallel SI \Rightarrow \frac{CJ}{SI} = \frac{MC}{MS} = 1 \Rightarrow CJ = SI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{SI}{ID} = \frac{2}{3}$ ■

BT6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'B', C'B', CC', AA'$.

- Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thang cân.
- Tính chu vi và diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a .

a) Ta có MN là đường trung bình của $\Delta A'B'C'$

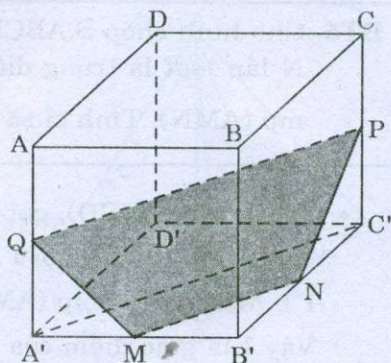
nên $MN \parallel A'C'$ (1)

Ta có $\overrightarrow{A'Q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$ và $\overrightarrow{C'P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'C}$

mà $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{C'C}$ nên $\overrightarrow{A'Q} = \overrightarrow{C'P}$

Do đó $A'QPC'$ là hình bình hành

nên $PQ \parallel A'C'$ (2)



Từ (1) và (2) $\Rightarrow PQ \parallel MN$.

Ta có $\triangle AMQ = \triangle C'PN$ (c.g.c) $\Rightarrow MQ = NP$

Vẽ MH và $NK \perp PQ$

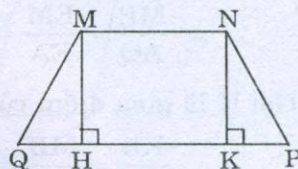
Ta có $\triangle MHQ = \triangle NKP$ nên $\widehat{MQH} = \widehat{NPK}$

Do đó $MNPQ$ là hình thang cân.

$$\text{b) Ta có : } MN = \frac{A'C'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$PQ = A'C' = a\sqrt{2}$$

$$NP = MQ = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$



$$\text{Do đó : cv (MNPQ)} = \frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2} + 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$$

Do $\triangle MQH = \triangle NKP$ nên $HQ = KP$

$$\text{Vậy : } KP = QH = \frac{1}{2}(PQ - HK) = \frac{1}{2}(PQ - MN) = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Do } \triangle NPK \text{ vuông} \Rightarrow NK^2 = NP^2 - KP^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{6a^2}{16}$$

$$\text{Vậy : dt (MNPQ)} = \frac{1}{2}NK(MN + PQ) = \frac{a\sqrt{6}}{8}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} \blacksquare$$

BT7. Cho $\triangle ABC$ nằm trong mp (α). Gọi Bx, Cy là hai nửa đường thẳng song song nằm về cùng phía đối với mp (α). Gọi M và N là hai điểm di động trên Bx, Cy sao cho $CN = 2BM$.

a) Chứng minh MN luôn qua một điểm cố định I khi M, N di động.

b) Lấy E thuộc đoạn AM với $EM = \frac{1}{3}AE$, IE cắt AN tại F , BE cắt CF tại Q . Chứng minh AQ song song Bx và Cy , và mp (QMN) chứa một đường thẳng cố định khi M, N di động.

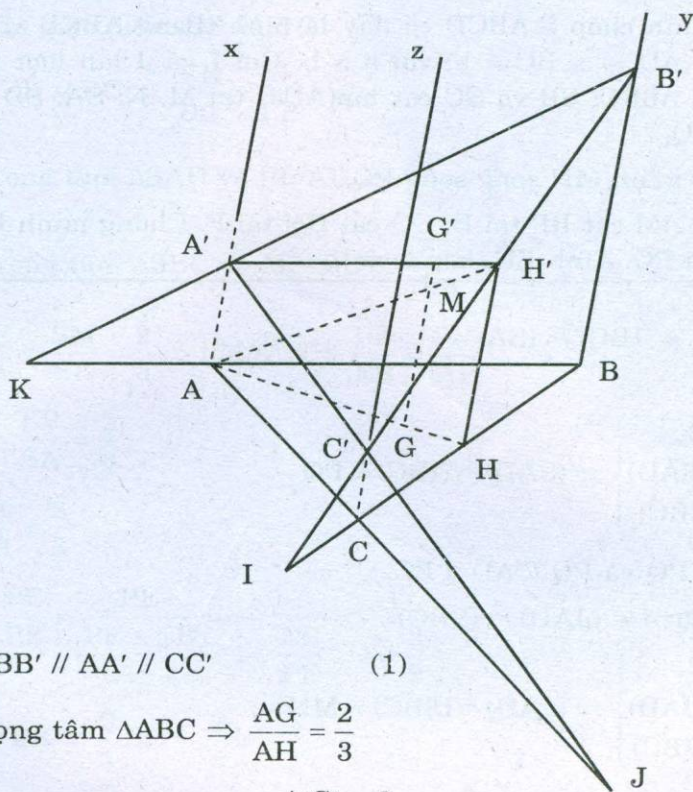
a) Trong mặt phẳng (Bx, Cy) , gọi I là giao điểm của MN và BC .

$$\text{Do } MB \parallel NC \text{ nên } \frac{IB}{IC} = \frac{MB}{NC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IB = 2IC \Rightarrow I \text{ là trung điểm } BC.$$

Vậy MN di động luôn qua I cố định.

b) • Ta có : $Q \in BE \Rightarrow Q \in \text{mp (ABM)}$

$$Q \in CF \Rightarrow Q \in \text{mp (ANC)}$$



$$HH' \parallel BB' \parallel AA' \parallel CC' \quad (1)$$

$$G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Rightarrow \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3}$$

$$G' \text{ là trọng tâm } \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{A'G'}{A'H'} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{AG}{AH} = \frac{A'G'}{A'H'} \Rightarrow GG' \parallel HH' \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow GG' \parallel AA'$$

- Gọi M là giao điểm AH' và GG'

$$\text{Ta có } G'M \parallel AA' \Rightarrow \frac{G'M}{AA'} = \frac{H'G'}{H'A'} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow G'M' = \frac{a}{3}$$

$$\text{Ta có } MG \parallel HH' \Rightarrow \frac{MG}{HH'} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow MG = \frac{2}{3} HH' = \frac{2}{3} \frac{BB' + CC'}{2} = \frac{b+c}{3}$$

$$\text{Do đó } GG' = MG' + MG = \frac{a+b+c}{3}.$$

BT9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với đáy AD và BC có $AD = a$, $BC = b$, với $a > b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm $\triangle SAD$, $\triangle SBC$; SB và SC cắt $mp(ADJ)$ tại M , N ; SA , SD cắt $mp(BCI)$ tại P , Q .

a) Chứng minh MN song song PQ .

b) Giả sử AM cắt BP tại E ; CQ cắt DN tại F . Chứng minh EF song song MN và PQ . Tính EF theo a và b .

a) Ta có: $I \in (IBC) \cap (SAD)$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AD // BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \end{array} \right\} \Rightarrow (SAD) \cap (IBC) = PQ$$

Với $I \in PQ$ và $PQ // AD // BC$.

Tương tự: $J \in (JAD) \cap (SBC)$

$$\left. \begin{array}{l} AD // BC \\ AD \subset (JAD) \\ BC \subset (SBC) \end{array} \right\} \Rightarrow (JAD) \cap (SBC) = MN$$

Với $J \in MN$ và $MN // AD // BC$

Do đó: $MN // PQ$

b) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} E \in AM \Rightarrow E \in (AMND) \\ E \in PQ \Rightarrow E \in (BPCQ) \end{array} \right\} \Rightarrow E \in (AMND) \cap (BPCQ)$$

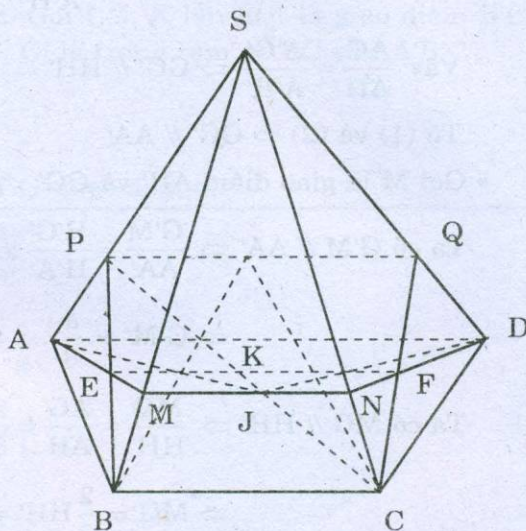
Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} F \in DN \Rightarrow F \in (AMND) \\ F \in CQ \Rightarrow F \in (BPCQ) \end{array} \right\} \Rightarrow F \in (AMND) \cap (BPCQ)$$

Vậy $EF = (AMND) \cap (BPCQ)$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MN \subset (AMND) \\ PQ \subset (BPCQ) \\ MN // PQ \end{array} \right\} \Rightarrow EF // PQ // MN$$



- Gọi K là giao điểm EF và PC

$$\text{Ta có } EK \parallel BC \Rightarrow \frac{KE}{BC} = \frac{PE}{PB}$$

$$\text{Do I là trọng tâm } \triangle SAD \text{ và } PI \parallel AD \Rightarrow \frac{SP}{AS} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Do J là trọng tâm } \triangle SBC \text{ và } MJ \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Do đó } \frac{SP}{SA} = \frac{SM}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow PM \parallel AB \Rightarrow \frac{PE}{EB} = \frac{PM}{AB}$$

$$\text{Mà } \frac{PM}{AB} = \frac{SP}{SA} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Do đó } \frac{PE}{EB} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{EK}{BC} = \frac{PE}{PB} = \frac{PE}{PE + EB} = \frac{1}{1 + \frac{EB}{PE}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow EK = \frac{2}{5} BC = \frac{2}{5} b$$

$$\text{Tương tự: } KF = \frac{2}{5} a$$

$$\text{Vậy } EF = EK + KF = \frac{2}{5} (a + b)$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

- Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.
 - Chứng minh MNPQ là hình bình hành.
 - Chứng minh MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang có cạnh bên AD, BC.
 - Xác định giao tuyến d của (SAB) và (SCD).
 - Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAD và SBC. Chứng minh d $\parallel$ MN.
- Cho hình bình hành ABCD, ABEF không cùng nằm trên một mặt phẳng.
 - Chứng minh CE $\parallel$ DF.

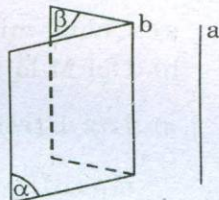
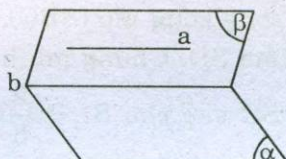
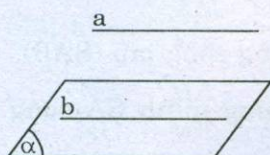
- b) Gọi M, N là hai điểm trên AC, AD sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AD} = m$. Gọi H, K là hai điểm trên BF và AF sao cho $\frac{FK}{FA} = \frac{FL}{FB} = n$ với $m, n \in (0; 1)$. Chứng minh $MN \parallel KL$.
- c) Cho $m = \frac{2}{5}$ và $n = \frac{3}{5}$. Chứng minh $NK \parallel DF$.
4. Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC. Gọi R là điểm trên BD sao cho $BR = 2RD$.
- Xác định E, F là giao điểm của (RPQ) với CD, AD.
 - Tìm giao tuyến của (PQR) và (ABE).
 - Chứng minh R, F lần lượt là trọng tâm của tam giác BCE và ACE.
 - Chứng minh $FR \parallel PQ$.
 - Tính tỉ số diện tích mà mặt phẳng (PQR) chia cắt tam giác ACD.
5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, OB.
- Tìm giao điểm I của SD và (AMN).
 - Tính $\frac{SI}{ID}$.
6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi, O là giao điểm của AC và BD. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Chứng minh :
- $ME \parallel AC$ và $NF \parallel BD$.
 - Ba đường thẳng EM, NF, SO đồng quy.
 - Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.
7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, SBC, SCD và SDA.
- Chứng minh tứ giác MNEF là hình thoi.
 - Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh ME, NF và SO đồng quy.
8. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD. Lấy E trên AD ($E \neq A, D$).
- Xác định mặt cắt của tứ diện và (IJE).
 - Tìm vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành.
 - Tìm điều kiện của A.BCD và vị trí E trên AD sao cho thiết diện là hình thoi.

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Định nghĩa : Một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Các định lí

1. Một đường thẳng (không nằm trên (α)) song song với mặt phẳng (α) khi và chỉ khi nó song song với một đường thẳng nằm trên (α) .
2. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) thì bất kì mặt phẳng nào chứa a mà cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .
3. Hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của nó song song với đường thẳng đó.



BT1. Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm $\triangle ABD$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh MG song song mp (ACD).

Gọi I là trung điểm AD. Do G là trọng tâm $\triangle ABD$

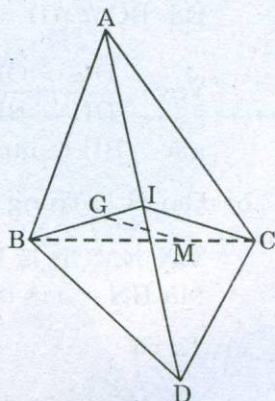
$$\text{nên } \frac{BG}{GI} = 2 \text{ mà } \frac{BM}{CM} = 2$$

$$\text{Vậy } \frac{BG}{GI} = \frac{BM}{CM}$$

Áp dụng định lí Thalès trên mp (BIC),
ta có $GM \parallel IC$.

Mà IC nằm trong mp (ACD)

Do đó : $GM \parallel \text{mp (ACD)}$ ■



BT2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, CD và SA.

- a) Chứng minh SB và SC song song với mp (MNP).
- b) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$. Chứng minh G_1G_2 song song mp (SAC).

a) Ta có $MP \parallel SB$ và MP nằm trong mp (MNP).

Vậy $SB \parallel$ mp (MNP).

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Ta có $OP \parallel SC$ và OP nằm trong mp (MNP).

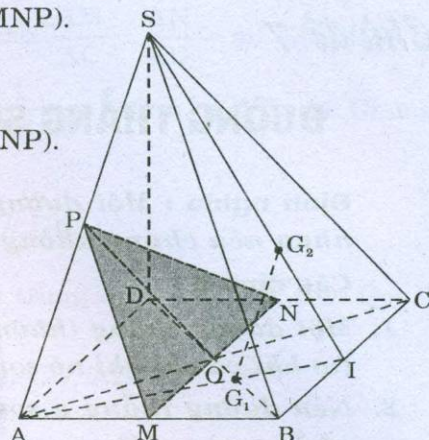
Vậy $SC \parallel$ mp (MNP).

b) Gọi I là trung điểm BC.

$$G_1 \text{ trọng tâm } \triangle ABC \Rightarrow \frac{IG_1}{IA} = \frac{1}{3}$$

$$G_2 \text{ trọng tâm } \triangle SBC \Rightarrow \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IS} \Rightarrow G_1G_2 \parallel SA$$



Mà SA nằm trong mp (SAC) nên $G_1G_2 \parallel$ mp (SAC) ■

BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi G là trọng tâm $\triangle SCD$, O là giao điểm AC và BD.

a) Chứng minh OG song song mp (SBC).

b) Gọi M là trung điểm SD. Chứng minh MC song song mp (SAB).

c) Lấy I trên đoạn SC sao cho $SI = \frac{2}{3}SC$. Chứng minh SA song song mp (BID).

a) Gọi H là trung điểm SC. Ta có : $\frac{DG}{DH} = \frac{2}{3}$

$$\text{Do } BC \parallel AD \Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = 2 \Rightarrow OD = 2OB \Rightarrow \frac{OD}{BD} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{DG}{DH} = \frac{OD}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow OG \parallel BH$$

mà $BH \subset$ mp (SBC) $\Rightarrow OG \parallel$ mp (SBC).

b) Gọi N là trung điểm SA. Ta có : $\vec{NM} = \vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AD}$

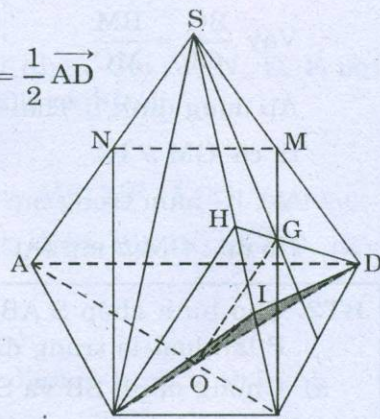
Vậy NMCB là hình bình hành $\Rightarrow CM \parallel BN$

Mà $BN \subset$ mp (SAB) $\Rightarrow CM \parallel$ mp (SAB).

c) Ta có : $SI = \frac{2}{3}SC \Rightarrow \frac{CI}{CS} = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} BC \parallel AD &\Rightarrow \frac{CO}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{CO}{CA} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } \frac{CO}{CA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow OI \parallel SA \text{ mà } OI \subset \text{mp (BID)} \Rightarrow SA \parallel \text{mp (BID)} \quad \blacksquare$$



BT4. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là O, O'.

a) Chứng minh OO' song song mp (ADF) và (BCE).

b) Lấy hai điểm M, N trên cạnh AE và BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE$ và $BN = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song mp (CDFE).

a) Ta có : OO' là đường trung bình của $\triangle AEC$ nên $OO' \parallel EC$ mà EC nằm trong mp (BCE) nên $OO' \parallel \text{mp (BCE)}$.

Tương tự, $OO' \parallel DF$ nên $OO' \parallel \text{mp (ADF)}$.

b) Trong mp (ABCD), AN cắt CD tại G.

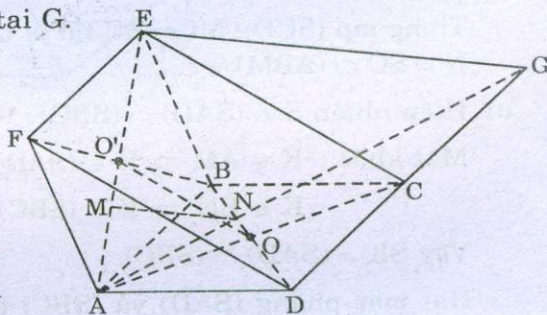
Ta có : $AB \parallel DG$

$$\Rightarrow \frac{NB}{ND} = \frac{NA}{NG} = \frac{1}{2}$$

Mặt khác : $\frac{AM}{ME} = \frac{1}{2}$ (gt)

Vậy $\frac{NA}{NG} = \frac{MA}{ME}$ nên $MN \parallel EG$

Mà EG nằm trong mp (CDFE) nên $MN \parallel \text{mp (CDFE)}$ ■



BT5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm của SB và mp (MCD).

a) Hai mp (SAD) và (SBC) đã có chung điểm S.

Ta có $BC \parallel AD$ mà $AD \in \text{mp (SAD)}$

$$\Rightarrow BC \parallel \text{mp (SAD)}$$

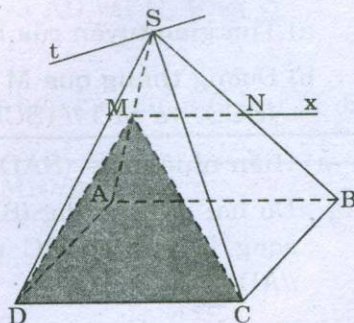
Mp (SBC) chứa BC.

Vậy mp (SAD) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến $St \parallel AD \parallel BC$.

b) Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel \text{mp (MCD)}$

Mp (SAB) chứa AB sẽ cắt mp (MCD) theo giao tuyến $Mx \parallel AB \parallel CD$.

Trong mp (SAB) gọi N là giao điểm của Mx và SB thì N là giao điểm của SB và mp (MCD) ■



BT6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên SD .

- Tìm giao điểm N của SC và (ABM) .
- Gọi K là giao điểm của AM và BN . Chứng minh khi M thay đổi trên SD thì SK luôn luôn song song với mặt phẳng cố định.

- Ta có $CD \parallel AB$ mà $AB \subset (ABM) \Rightarrow CD \parallel (ABM)$

$M_p(SCD)$ chứa CD

$M_p(SCD)$ và $m_p(MAB)$ có điểm chung là M .

Vậy $(SCD) \cap (MAB) = Mt \parallel AB$

Trong $m_p(SCD)$, $Mt \cap SC$ tại N thì

$N = SC \cap (ABM)$.

- Hiển nhiên $S \in (SAD) \cap (SBC)$

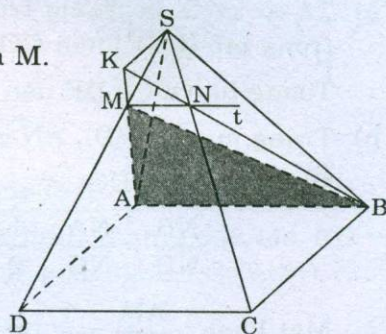
Mặt khác : $K \in AM \Rightarrow K \in (SAD)$

$K \in BN \Rightarrow K \in (SBC)$

Vậy $SK = (SAD) \cap (SBC)$.

Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) chứa hai đường thẳng song song $AD \parallel BC$, vậy giao tuyến SK của chúng song song $AD \parallel BC$.

Do $SK \parallel AD$ mà $AD \subset (ABCD)$ nên SK song song mặt phẳng cố định $(ABCD)$ ■



BT7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$ và I là trung điểm AB . Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho $AD = 3AM$.

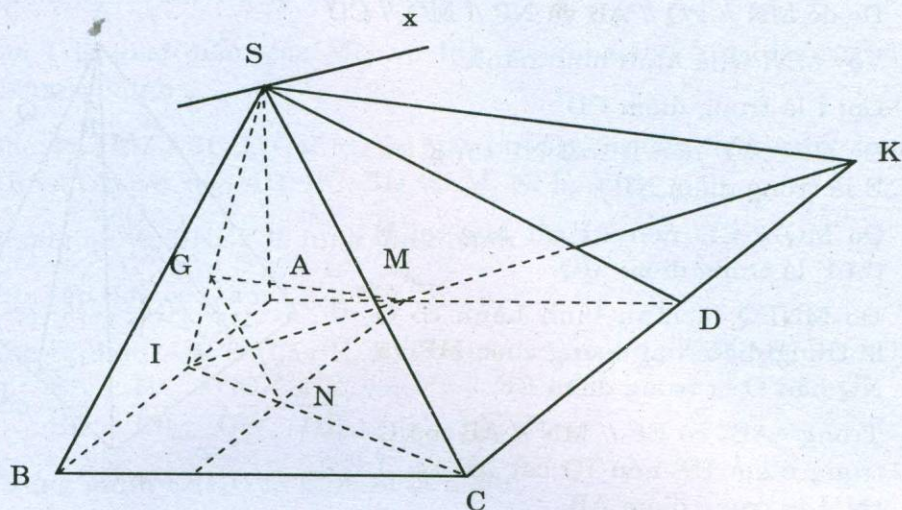
- Tìm giao tuyến của hai $m_p(SAD)$ và (SBC) .
- Đường thẳng qua M và song song AB cắt CI tại N . Chứng minh $NG \parallel (SCD)$ và $MG \parallel (SCD)$.

- Hiển nhiên $S \in (SAD) \cap (SBC)$

Do hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AD và BC nên giao tuyến chúng là đường thẳng qua S và $\parallel AD \parallel BC$.

- Ta có $IA \parallel NM \parallel CD \Rightarrow \frac{IN}{IC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$

Mặt khác G là trọng tâm $\triangle SAB$ nên $\frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}$



$$\text{Vậy } \frac{IN}{IC} = \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3} \Rightarrow GN \parallel SC$$

$$\text{Mà } SC \subset (SCD) \Rightarrow GN \parallel (SCD)$$

- Gọi K là giao điểm IM và CD

$$\text{Do } MN \parallel CD \text{ nên } \frac{IM}{IK} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{IM}{IK} = \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3} \Rightarrow MG \parallel SK$$

$$\text{Mà } SK \subset (SCD) \Rightarrow MG \parallel (SCD).$$

BT8. Cho tứ diện ABCD. Qua điểm M trên AC dựng mặt phẳng (α) song song AB và CD, mp (α) lần lượt cắt BC, BD và AD tại N, P và Q.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Gọi O là giao điểm của MP và NQ. Tìm tập hợp các điểm O khi M di động trên đoạn AC.

$$\text{a) } (\alpha) \parallel AB \text{ mà } AB \subset (ABC) \text{ nên } (\alpha) \cap (ABC) = MN \parallel AB$$

$$(\alpha) \parallel CD \text{ mà } CD \subset (BCD)$$

$$\text{Nên } (\alpha) \cap (BCD) = NP \parallel CD$$

$$(\alpha) \parallel (AB) \text{ mà } AB \subset (ABD)$$

$$\text{Nên } (\alpha) \cap (ABD) = PQ \parallel AB$$

$$(\alpha) \parallel CD \text{ mà } CD \subset (ACD)$$

$$\text{Nên } (\alpha) \cap (ACD) = MQ \parallel CD$$

Do đó $MN \parallel PQ \parallel AB$ và $NP \parallel MQ \parallel CD$

Vậy $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Gọi I là trung điểm CD

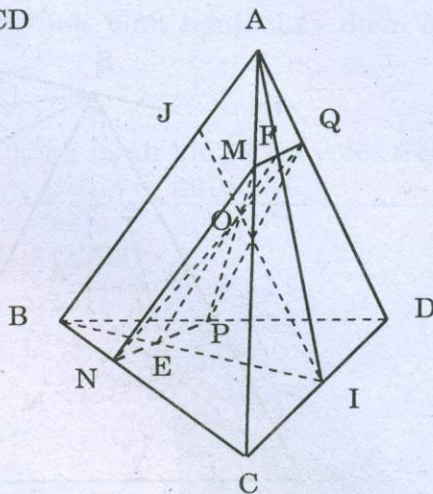
Do $NP \parallel CD$ nên BI cắt NP tại E thì E là trung điểm NP

Do $MQ \parallel CD$ nên AI cắt MQ tại F thì F là trung điểm MQ .

Do $MNPQ$ là hình bình hành có O là trung điểm hai đường chéo MP và NQ nên O là trung điểm EF

Trong $\triangle ABI$ có $EF \parallel MN \parallel AB$ mà O trung điểm EF nên IO cắt AB tại J thì J là trung điểm AB .

Vậy khi M di động trên đoạn AC thì tập hợp các điểm O là đoạn IJ .



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện $ABCD$. Mặt phẳng (P) di động luôn song song AB và CD lần lượt cắt AC, AD, BC, BD tại M, N, E, F .

a) Chứng minh $MNEF$ là hình bình hành.

b) Tìm tập hợp tâm I của $MNEF$.

2. Cho hai hình thang $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Lấy M, N lần lượt trên AB, CE sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CE} = x$ ($0 < x < 1$).

Chứng minh khi x thay đổi thì MN luôn song song mặt phẳng (BCE) .

3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng :

a) Điều kiện cần và đủ để II' song song (BCD) là $\frac{BC}{BD} = \frac{AB + AC}{AB + AD}$.

b) Điều kiện cần và đủ để II' song song (BCD) và (ACD) là $BC = BD$ và $AC = AD$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy M là điểm di động trên AB . Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BC cắt SB, SC, SD tại N, P, Q .

- a) Chứng minh MNPQ là hình thang.
- b) Gọi I là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh I di động trên một đường cố định.
5. Cho tứ diện ABCD. Gọi (α) là mặt phẳng di động luôn song song với AB và CD cắt AC, AD, BC, BD tại M, N, E, F.
- a) Chứng minh MNEF là hình bình hành.
- b) Tìm tập hợp các tâm I của MNEF.
6. Cho tứ diện ABCD. Lấy E, F, G, H lần lượt trên AD, AB, BC, CD sao cho $\frac{EA}{ED} = \frac{FA}{FB} = \frac{GC}{GB} = \frac{HC}{HD}$.
- a) Chứng minh EFGH là hình bình hành.
- b) Chứng minh AC song song với (EFGH) và BD song song với (EFGH).
7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là điểm di động trên SC. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD.
- a) Tìm giao điểm E, F của SB, SD với (P).
- b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của ME với CB, MF với CD. Chứng minh I, J, A thẳng hàng.
8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy lớn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.
- a) Chứng minh MN song song với CD.
- b) Tìm điểm P là giao điểm của SC và (ADN).
- c) Gọi I là giao điểm của AN với DP. Chứng minh SI // AB // CD.
- d) Tứ giác SABI là hình gì ?

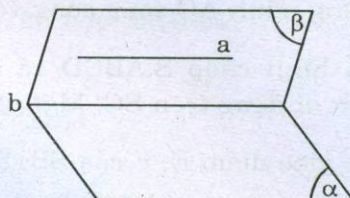
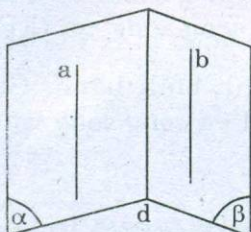
Chủ đề 8

XÁC ĐỊNH MẶT CẮT CỦA ĐA DIỆN VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG ĐƯỜNG THẲNG a CHO TRƯỚC

Phương pháp

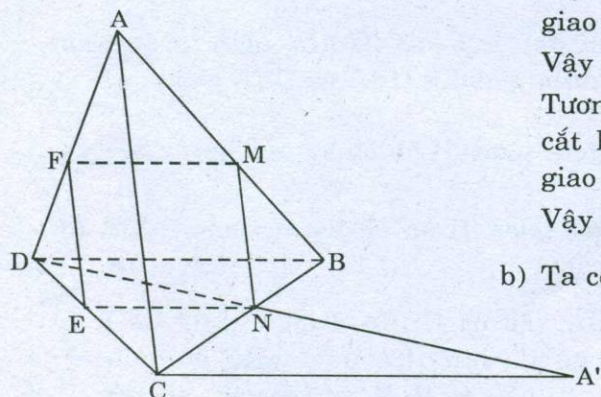
Ta đi tìm các đoạn giao tuyến giống ở chủ đề 5. Chú ý sử dụng một trong hai định lý:

- Hai mặt phẳng cắt nhau cùng chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song hay trùng với một trong hai đường thẳng đó.
- Nếu đường thẳng a song song mặt phẳng (α) thì bất kì mặt phẳng nào chứa a , cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến b thì b song song a .



BT1. Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng (α) song song với AC và DB cắt AB, BC, CD, AD lần lượt tại M, N, E, F.

- Chứng minh MNEF là hình bình hành.
- Từ C vẽ đường thẳng song song với BD cắt ND tại A'. Chứng minh nếu $CA' = CA$ thì MNEF là hình thoi.



- Mặt phẳng (α) song song AC nên cắt mặt phẳng (ABC) và mp (ACD) theo giao tuyến $MN \parallel AC$ và $EF \parallel AC$.
Vậy $MN \parallel EF$.

Tương tự, mp (α) song song DB. Vậy cắt hai mp (ABD) và mp (CBD) theo giao tuyến $MF \parallel EN \parallel DB$.

Vậy MFEN là hình bình hành.

$$\text{b) Ta có: } EF \parallel AC \Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{DE}{DC} \quad (1)$$

$$EN \parallel A'C \Rightarrow \frac{EN}{A'C} = \frac{DE}{DC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{EN}{A'C}$$

Vậy nếu $AC = A'C$ thì $EF = EN$, lúc đó $ENMF$ là hình thoi ■

BT2. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc CD , $AB = a$, $CD = b$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm AB và CD . Lấy điểm M trên IJ . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB , CD .

a) Xác định mặt cắt của (α) và tứ diện $ABCD$.

b) Tính diện tích mặt cắt này khi $IM = \frac{IJ}{3}$.

a) $M_p(ICD)$ chứa CD mà $m_p(\alpha)$ song song CD .

$M_p(ICD)$ và $m_p(\alpha)$ có chung điểm M , vậy $m_p(ICD)$ và $m_p(\alpha)$ có giao tuyến qua M và song song CD . Giao tuyến này cắt IC , ID lần lượt tại H và K .

Hai $m_p(CAB)$ và $m_p(DAB)$ chứa AB song song với $m_p(\alpha)$.

Vậy hai mặt phẳng này cắt (α) theo giao tuyến PHQ và RKS có $PQ \parallel RS \parallel AB$.

$M_p(ACD)$ chứa CD song song (α) .

Vậy $SQ = m_p(ACD) \cap m_p(\alpha)$ thì $SQ \parallel CD$.

Do đó mặt cắt $PQSR$ là hình bình hành.

Mà $(\overline{AB}, \overline{CD}) = 90^\circ$ nên $\widehat{QPR} = 90^\circ$

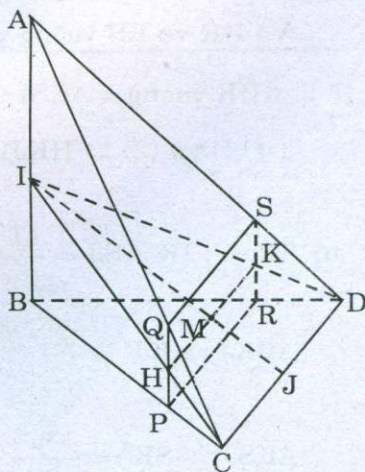
Vậy $PQSR$ là hình chữ nhật.

$$\text{b) Do } \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{HK}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{b}{3}$$

$$\text{Ta có : } \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CH}{CI} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Mà } PQ \parallel AB \Rightarrow \frac{PQ}{AB} = \frac{CH}{CI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}a$$

$$\text{Do đó : } dt(PQSR) = HK \cdot PQ = \frac{2}{9}ab \quad \blacksquare$$



BT3. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh a. Gọi I và J là trung điểm AC và BC. Gọi K trên cạnh BD với $KB = 2KD$.

a) Xác định thiết diện của tứ diện với mp (IJK). Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b) Tính diện tích thiết diện theo a.

a) Trên mp (BCD) : $IK \cap CD = \{O\}$

Trên mp (ACD) : $OI \cap AD = \{H\}$

Vậy mặt cắt là tứ giác IJKH.

Hai mp (IJK) và (ABD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song IJ và AB, vậy cắt nhau theo giao tuyến HK thì $HK \parallel IJ \parallel AB$ (1)

$$\text{Ta có : } HK \parallel AB \Rightarrow \frac{DH}{DA} = \frac{HK}{AB} = \frac{DK}{DB} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{a}{3} \text{ và } AH = BK = \frac{2a}{3}$$

$$\triangle AIH = \triangle BJK \Rightarrow IH = JK$$

Vẽ HR và KS vuông góc IJ.

$$\triangle HIR \text{ vuông} = \triangle KSI \text{ vuông} \Rightarrow \hat{I} = \hat{J} \quad (2)$$

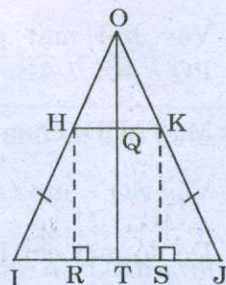
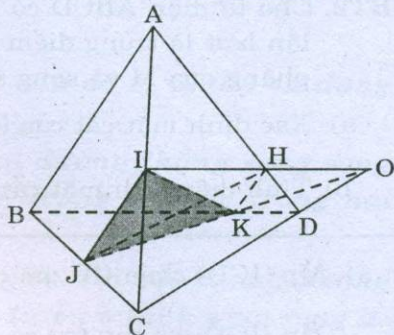
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ HKJI là hình thang cân.

$$\text{b) Ta có : } IR = SJ = \frac{IJ - HK}{2} = \frac{\frac{a}{2} - \frac{a}{3}}{2} = \frac{a}{12}$$

$$\triangle BKJ \Rightarrow KJ^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{3} = \frac{13}{36}a^2$$

$$\triangle KSJ \Rightarrow SK^2 = \frac{13a^2}{36} - \frac{a^2}{12} = \frac{51a^2}{144}$$

$$\text{Vậy } dt(HKJI) = \frac{1}{2}(HK + IJ) \cdot SK = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{2}\right) \frac{a\sqrt{51}}{12} = \frac{5a^2\sqrt{51}}{144} \quad \blacksquare$$



BT4. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy hai điểm M và N lần lượt nằm trên SB và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song SC. Xác định thiết diện S.ABCD và mp (α) .

Mp (SCD) chứa SC mà $SC \parallel mp(\alpha)$.

Vậy mp (α) cắt mp (SCD) theo giao tuyến $NK \parallel SC$.

Trong mp (SBD), MK cắt SO tại I.

Mp (SAC) chứa SC và $SC \parallel mp(\alpha)$.

Vậy mp (α) cắt mp (SAC) theo giao tuyến qua I và song song SC. Giao tuyến này cắt SA và AC tại L và J.

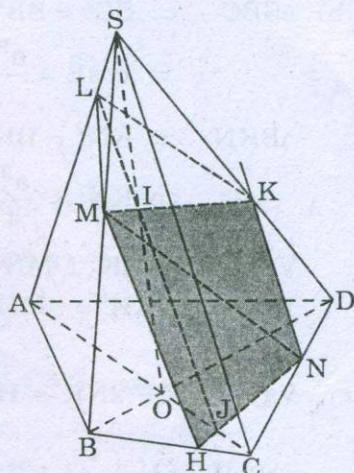
Do đó : $LK = mp(\alpha) \cap mp(SAD)$

$LM = mp(\alpha) \cap mp(SAB)$

Trên mp (ABCD), NJ cắt BC tại H thì

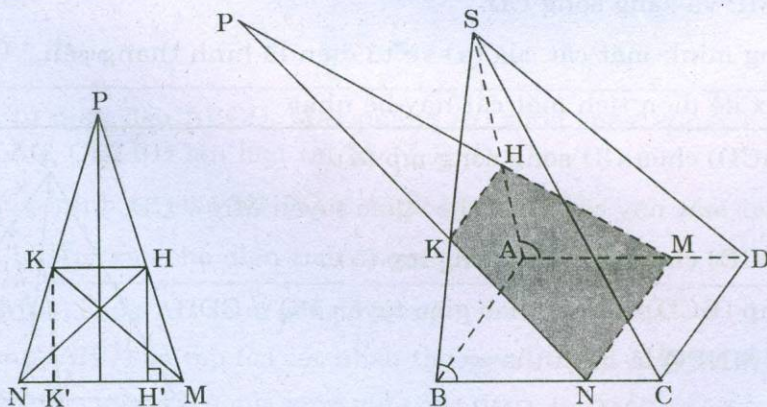
$MH = mp(\alpha) \cap mp(SBC)$.

Do đó thiết diện là ngũ giác NKLMH ■



BT5. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy S là điểm nằm ngoài mp (ABCD) sao cho $\triangle SAB$ đều, và $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm SA, SB. Lấy M trên cạnh AD. Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$). Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.

- Chứng minh HKNM là hình thang cân.
- Tính diện tích tứ giác HKNM theo a và x.



- Mp (ABCD) chứa AB; mp (HMK) chứa HK mà $HK \parallel AB$ nên hai mặt phẳng này có giao tuyến là MN thì $MN \parallel AB \parallel CD$ (1)

Ta có : $SA = SB = a$, $AD = BC = a$, $SC = SD = a\sqrt{3}$

Vậy $\triangle SBC = \triangle SAD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{SBC} = \widehat{SAD}$

$\Rightarrow \triangle BKN = \triangle AHN$ (c.g.c) $\Rightarrow NK = HM$ (2)

Từ (1) và (2) : tứ giác NKHM hình thang cân.

$$b) \Delta SBC \Rightarrow SC^2 = SB^2 + BC^2 - 2SB \cdot BC \cdot \cos \widehat{B}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{B} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBC} = 120^\circ$$

$$\Delta BKN \Rightarrow KN^2 = BK^2 + BN^2 - 2BK \cdot BN \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow KN^2 = \frac{a^2}{4} + x^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)(x)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + x^2 + \frac{1}{2}ax$$

Vẽ HH' và $KK' \perp MN$ ta có : $HK = H'K'$

Ta có : $\Delta NKK' = \Delta MHH'$ (c.g.c) $\Rightarrow NK' = MH'$

$$\text{Vậy } MN = 2NK' + H'K' \Rightarrow NK' = \frac{MN - NK}{2} = \frac{a - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}$$

$$\Delta NKK' \text{ vuông} \Rightarrow KK'^2 = NK^2 - NK'^2 = \frac{3a^2}{16} + x^2 + \frac{1}{2}ax$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } dt(HKNM) &= \frac{HK + NM}{2} \cdot KK' = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + a \right) \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3a^2 + 16x^2 + 8ax} \\ &= \frac{3a}{16} \sqrt{(4x + a)^2 + 2a^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

BT6. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M và P là hai điểm di động trên AD và BC sao cho $AM = CP = x$ với $0 < x < a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua MP và song song CD.

- Chứng minh mặt cắt của (α) và tứ diện là hình thang cân.
- Tìm x để diện tích mặt cắt này bé nhất.

a) $M_p(ACD)$ chứa CD song song $m_p(\alpha)$.

Vậy hai mặt này cắt nhau theo giao tuyến $MN \parallel CD$.

$M_p(BCD)$ chứa CD song song $m_p(\alpha)$.

Vậy $m_p(BCD)$ cắt (α) theo giao tuyến $PQ \parallel CD$.

Do đó MNPQ là hình thang.

Hai tam giác DMQ và CNP bằng nhau vì

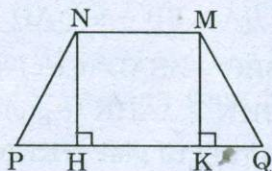
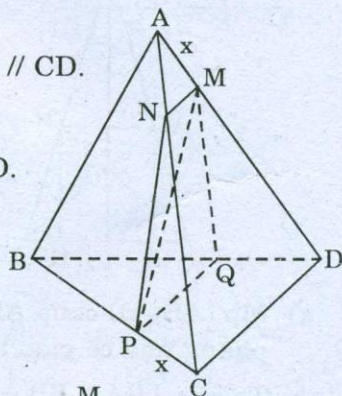
$$\widehat{MDQ} = \widehat{NCP} = 60^\circ$$

$$PC = QD = x$$

$$DM = CN = a - x$$

Suy ra $MQ = NP$

Do đó MNPQ là hình thang cân.



$$b) \Delta AMN \text{ đều} \Rightarrow MN = x$$

$$\Delta BPQ \text{ đều} \Rightarrow PQ = a - x$$

Vẽ NH và MK vuông góc PQ.

$$\Delta \text{ vuông } NPH = \Delta \text{ vuông } MKQ \Rightarrow PH = KQ$$

$$\Rightarrow 2PH = PQ - HK = PQ - MN$$

$$\Rightarrow PH = \frac{1}{2}[(a - x) - x] = \frac{a}{2} - x$$

$$\Delta CNP \Rightarrow NP^2 = CN^2 + CP^2 - 2CN \cdot CP \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow NP^2 = (a - x)^2 + x^2 - 2(a - x)x \cdot \frac{1}{2} = 3x^2 - 3ax + a^2$$

$$\Delta PNH \text{ vuông} \Rightarrow NH^2 = NP^2 - PH^2 = 3x^2 - 3ax + a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

$$\Rightarrow NH^2 = 2x^2 - 2ax + \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Do đó : } dt(MNQP) = \frac{1}{2}(MN + PQ) \cdot NH = \frac{a}{2} \sqrt{2\left(x^2 - ax + \frac{3a^2}{8}\right)}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{8}} \geq \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Do đó : } S_{\min} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \quad \blacksquare$$

BT7. Cho tứ diện đều ABCD. Mặt phẳng (α) song song với AD và BC cắt AB, AC, CD, BD lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

b) Tìm mp (α) sao cho diện tích tứ giác MNPQ đạt giá trị lớn nhất.

a) Mp (ABD) chứa AD song song với mp (α).

Vậy mp (ABD) và mp (α) cắt nhau theo giao tuyến MQ thì QM // AD.

Mp (CAD) chứa AD song song mp (α).

Vậy mp (CAD) $\cap$ mp (α) = NP thì NP // AD.

Do đó : MQ // NP

Lập luận tương tự, MN // PQ // BC.

Vậy MNPQ là hình bình hành.

b) Gọi φ là góc của hai đường thẳng AD và BC thì φ là hằng số và $\varphi = \widehat{QMN}$.

Đặt a là cạnh tứ diện đều và $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$).

Ta có : $\triangle BMQ$ đều $\Rightarrow MQ = BM = a - x$

$\triangle AMN$ đều $\Rightarrow MN = AM = x$

Do đó :

$$dt(MNPQ) = MN \cdot MQ \cdot \sin \varphi = x(a - x) \cdot \sin \varphi$$

Do bất đẳng thức Cauchy ta có :

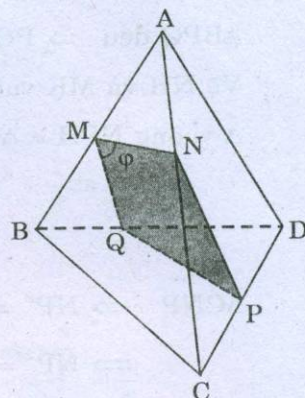
$$a = (a - x) + x \geq 2\sqrt{x(a - x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} \geq x(a - x) \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} \sin \varphi \geq dt(MNPQ)$$

$$\text{Do đó : } dt(MNPQ)_{\max} = \frac{a^2}{4} \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow BM = x = \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow M \text{ trung điểm } AB \quad \blacksquare$$



BT8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = CD = a$ và $AB \perp CD$. Trên cạnh AC lấy M sao cho $AM = x$. Với $0 < x < a$. Mặt phẳng (P) qua M song song AB và CD cắt BC , BD và AD lần lượt tại N , R , T . Tìm x để diện tích thiết diện tạo bởi (P) và tứ diện đạt giá trị lớn nhất.

Do $(P) \parallel AB$ nên $(P) \cap (ABC) = MN \parallel AB$

$(P) \parallel CD$ nên

$(P) \cap (BCD) = NR \parallel CD$

$(P) \cap (ACD) = MT \parallel CD$

$(P) \parallel AB$ nên $(P) \cap (ABD) = TR \parallel AB$.

Vậy $MTRN$ là hình bình hành

Do $AB \perp CD$ nên $MN \perp NR$

Vậy $MTRN$ là hình chữ nhật

$$\begin{aligned} \text{Do } MN \parallel AB &\Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB} \\ &\Rightarrow MN = CM = a - x \end{aligned}$$

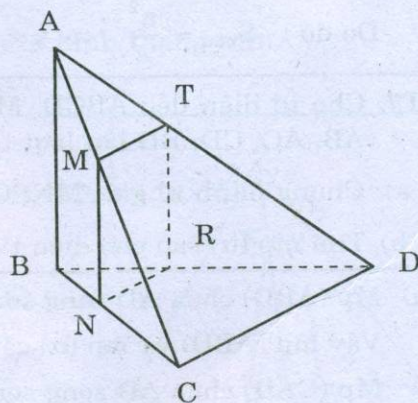
$$\text{Do } MT \parallel CD \Rightarrow \frac{MT}{CD} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow MT = x$$

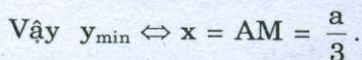
$$\text{Do đó } S(x) = dt(MTRN) = MT \cdot MN = x(a - x)$$

Áp dụng bất Cauchy cho 2 số dương x và $a - x$

$$\text{Ta có : } x + (a - x) \geq 2\sqrt{x(a - x)} = 2\sqrt{S(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq S(x)$$



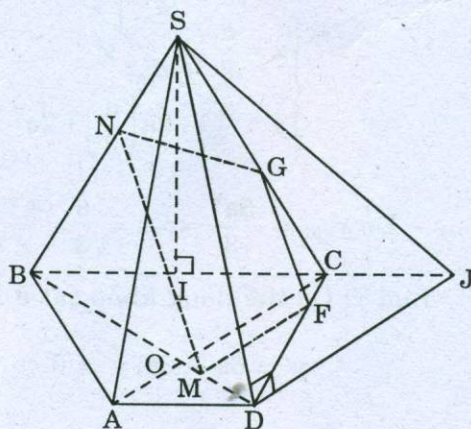
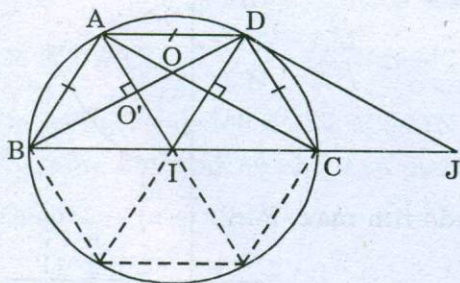


- Tính SD theo a ?
- Lấy điểm M trên đoạn OD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song SD và AC. Xác định thiết diện của mp (α) và hình chóp S.BCD.
- Tính diện tích thiết diện khi $MB = x\sqrt{3}$. Tìm x để diện tích lớn nhất.

Mà $SD \perp AC$ nên $SD \perp DJ$.

$$\Delta SIJ \text{ vuông} \Rightarrow SJ^2 = SI^2 + IJ^2 = \left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2a)^2 = 7a^2$$

$$\begin{aligned}\Delta S D J \text{ vuông} &\Rightarrow S D^2 = S J^2 - D J^2 = 7a^2 - AC^2 \\ &= 7a^2 - 3a^2 = 4a^2 \\ &\Rightarrow S D = 2a.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow OD = \frac{2}{3}DO' = \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$


$$\Rightarrow OB = BD - OD = a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có $AC \parallel mp(\alpha)$ nên $mp(\alpha)$ cắt $mp(BCD)$ theo giao tuyến $MF \parallel AC$.

Do $SD \parallel mp(\alpha)$ nên (α) cắt $mp(SBD)$ theo giao tuyến $MN \parallel SD$,

(α) cắt $mp(SCD)$ theo giao tuyến $FG \parallel SD$.

Mặt khác $SD \perp AC$ nên $MN \perp MF$.

Vậy mặt cắt là hình thang vuông $MNGF$.

$$c) \text{ Ta có : } OC = AC - AO = a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$DM = BD - MB = a\sqrt{3} - x\sqrt{3} = \sqrt{3}(a - x)$$

$$\text{Ta có : } MF \parallel OC \Rightarrow \frac{MF}{OC} = \frac{DM}{DO}$$

$$\Rightarrow MF = \frac{OC \cdot DM}{OD} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}(a - x)}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3}(a - x)$$

$$\text{Ta có : } OM = OD - DM = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}(a - x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(3x - 2a)$$

$$\text{Do } GF \parallel SD \Rightarrow \frac{GR}{SD} = \frac{CF}{CD} = \frac{OM}{OD}$$

$$\Rightarrow GF = \frac{SD \cdot OM}{OD} = \frac{2a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(3x - 2a) = 2(3x - 2a)$$

$$\text{Do } MN \parallel SD \text{ nên } \frac{MN}{SD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow MN = \frac{SD \cdot MB}{BD} = \frac{2a(x\sqrt{3})}{a\sqrt{3}} = 2x$$

$$\text{Vậy : dt}(MNGF) = \frac{MF}{2}(MN + GF)$$

$$= \sqrt{3}(a - x)[2x + 2(3x - 2a)] = 8\sqrt{3}(a - x)\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

$$\text{Do bất đẳng thức Cauchy : } \frac{a}{2} = (a - x) + \left(x - \frac{a}{2}\right) \geq 2\sqrt{(a - x)\left(x - \frac{a}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{16} \geq (a - x)\left(x - \frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{16} \cdot 8\sqrt{3} \geq \text{dt}(MNGF)$$

$$\text{Vậy : dt}(MNGF) \max = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a - x = x - \frac{a}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3a}{4} \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SI . Xác định mặt cắt của (MNP) và hình chóp.
2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AD, C'D'$. Xác định mặt cắt của (MON) và hình lập phương.
3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, I' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$. Lấy P trên II' sao cho $\frac{I'P}{II'} = \frac{1}{4}$. Xác định mặt cắt của hình lập phương và mặt phẳng qua P song song với AC và $B'D$.
4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D' . Tìm điều kiện của (P) để tứ giác $A'B'C'D'$ là
 - a) Hình thang.
 - b) Hình bình hành.
5. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ và mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau :
 - a) (P) qua G , qua E thuộc BC và song song với AD .
 - b) (P) qua G và song song với BC và AD .
6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC , (P) là mặt phẳng qua AM và song song BD .
 - a) Xác định mặt cắt của (P) và hình chóp.
 - b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với SB và SD . Tính tỉ số diện tích các tam giác SME và SBC ; SMF và SCD .
 - c) Gọi K là giao điểm của ME và BC . Gọi J là giao điểm của MF và CD . Chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF .
Tính tỉ số $\frac{EF}{KJ}$.

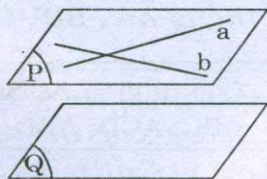
HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

1. Định nghĩa : Hai mặt phẳng gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện song song của hai mặt phẳng

Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song mặt phẳng (Q) thì (P) song song (Q).

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ và } b \subset (P) \\ a \text{ cắt } b \\ a, b \parallel (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$



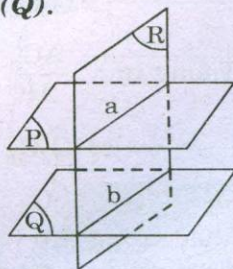
3. Các định lý

a) Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

b) Nếu đường thẳng a song song mặt phẳng (Q) thì qua a chỉ có duy nhất một mặt phẳng song song mặt phẳng (Q).

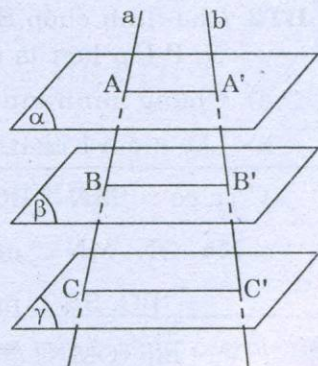
c) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) cắt (P) thì cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

$$\left. \begin{array}{l} (P) \parallel (Q) \\ a = (P) \cap (R) \\ b = (Q) \cap (R) \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$



d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

e) Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn bằng nhau.



f) Định lý Thalès

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

	$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$
GT	a cắt (α) , (β) , (γ) tại A, B, C b cắt (α) , (β) , (γ) tại A', B', C'
KL	$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

g) Định lí Thalès đảo

Nếu trên hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ thì ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song

BT1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh mp ($G_1G_2G_3$) song song mp (BCD).

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, CD, BD.

Ta có :
$$\frac{AG_1}{AI} = \frac{AG_3}{AK} = \frac{2}{3}$$

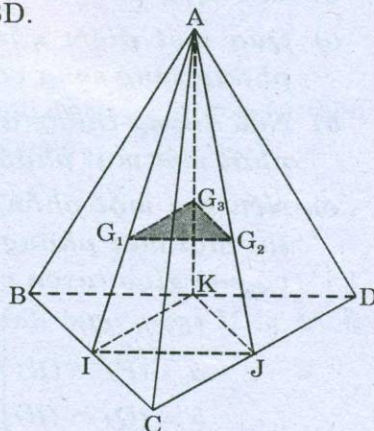
$$\Rightarrow G_1G_3 \parallel IK \quad (1)$$

Tương tự :
$$\frac{AG_3}{AK} = \frac{AG_2}{AJ} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow G_2G_3 \parallel KJ \quad (2)$$

Mà G_1G_3, G_3G_2 là hai đường thẳng cắt nhau trong mp ($G_1G_2G_3$) và IK, KJ là hai đường thẳng cắt nhau trong mp (BCD).

Do đó mp ($G_1G_2G_3$) // mp (BCD) ■



BT2. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SD, AB.

a) Chứng minh mp (OMN) song song mp (SBC).

b) Lấy điểm I trên ON. Chứng minh PI song song mp (SBC).

a) Ta có : $MN \parallel BC$ và $ON \parallel SB$

Mà $ON, MN \subset$ mp (OMN)

$BC, SB \subset$ mp (SBC)

Vậy mp (OMN) // mp (SBC).

b) Ta có : $OP \parallel AD$ mà $AD \parallel MN$

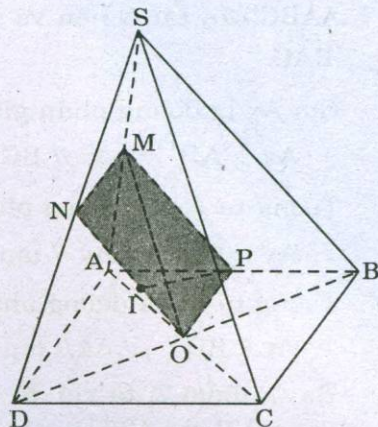
nên $OP \parallel MN$.

Vậy $P \in mp(OMN)$

$\Rightarrow PI \subset mp(OMN)$.

Mà $mp(OMN) \parallel mp(SBC)$

$\Rightarrow PI \parallel mp(SBC)$ ■



BT3. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên hai đường chéo AC và BF lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại H, K. Chứng minh :

- $mp(CBE)$ song song $mp(ADF)$.
- $mp(DEF)$ song song $mp(MNKH)$.

a) Ta có $BE \parallel AF$ và $BC \parallel AD$ mà BE, BC cắt nhau nằm trong $mp(BCE)$, AF, AD cắt nhau nằm trong $mp(ADF)$.

Vậy $mp(CBE) \parallel mp(ADF)$.

b) Ta có $NK \parallel EF$ (vì cùng $\parallel AB$).

$$\text{Mặt khác : } NK \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{BF} = \frac{AK}{AF}$$

$$MH \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AH}{AD}$$

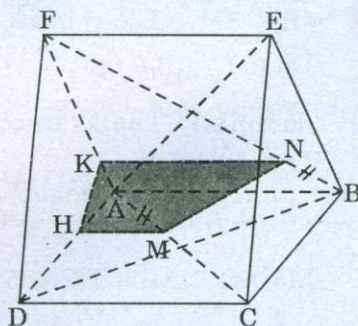
$$\text{Mà } BN = AM \text{ và } BF = AC. \quad \text{Vậy : } \frac{AK}{AF} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow HK \parallel FD$$

Ta có : EF và FD cắt nhau và nằm trong $mp(DEF)$

NK và HK cắt nhau và nằm trong $mp(NKHM)$

Mà $EF \parallel NK$ và $DF \parallel HK$.

Do đó $mp(DEF) \parallel mp(NKHM)$ ■



BT4. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$. Chứng minh rằng các đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAB}$ đồng phẳng.

$\triangle ABC$ cân tại A nên vẽ $AH \perp BC$ thì AH là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$.

Gọi Ax là đường phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ thì

$$Ax \perp AH \Rightarrow Ax \parallel BC \Rightarrow Ax \parallel mp(BCD)$$

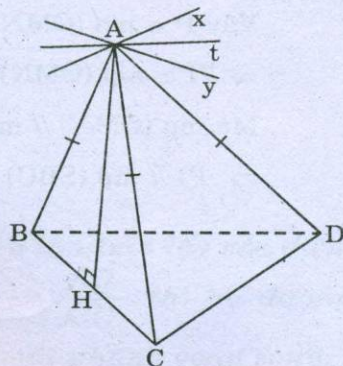
Tương tự Ay là đường phân giác của $\widehat{CAD}$ thì

$$Ay \parallel CD \Rightarrow Ay \parallel mp(BCD)$$

Tương tự At là đường phân giác của $\widehat{BAD}$ thì

$$At \parallel BD \Rightarrow At \parallel mp(BCD)$$

Do từ điểm A ta chỉ vẽ được duy nhất một mp $(\alpha) \parallel mp(BCD)$ nên các đường Ax, Ay, At cùng nằm trên (α) ■



BT5. Cho ba mặt phẳng (α) , (β) , (γ) song song nhau. Hai đường thẳng a, a' cắt ba mặt phẳng trên tại A, B, C và A', B', C'. Cho $AB = 5$; $BC = 6$; $A'C' = 12$. Tính A'B' và B'C'.

Do $(\alpha) \parallel (\beta) \parallel (\gamma)$

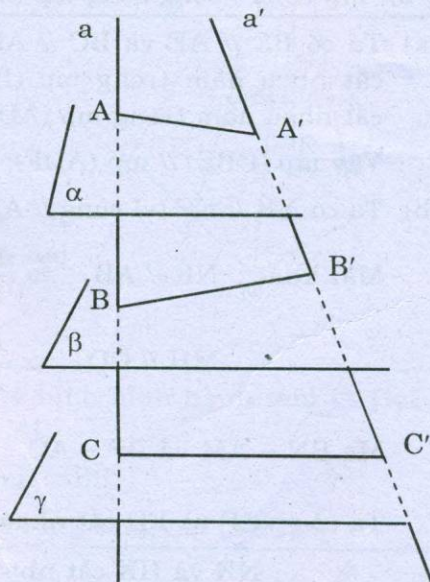
do định lý Thalès ta có

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\text{Mà } AC = AB + BC = 5 + 6 = 11$$

$$\Rightarrow A'B' = \frac{AB \cdot A'C'}{AC} = \frac{5 \cdot 12}{11} = \frac{60}{11}$$

$$\text{và } B'C' = BC \cdot \frac{A'C'}{AC} = 6 \cdot \frac{12}{11} = \frac{72}{11}$$



BT6. Cho tứ diện ABCD. Lấy hai điểm di động I, J lần lượt trên AD, BC sao cho $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$. Chứng minh IJ luôn song song một mặt phẳng cố định.

Vẽ $IH \parallel CD$ với $H \in AC$

Ta có $\frac{IA}{ID} = \frac{HA}{HD}$

Mà $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$

Nên $\frac{HA}{HD} = \frac{JB}{JC}$

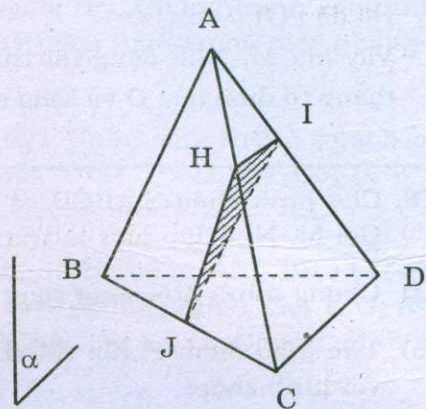
$\Rightarrow HJ \parallel AB$

Do đó $(IJH) \parallel AB$ và CD

Gọi (α) là mặt phẳng cố định qua AB và $\parallel CD$ thì $(\alpha) \parallel (IJH)$

Mà $IJ \subset (IJH)$

Nên $IJ \parallel mp(\alpha)$ cố định.



BT7. Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By . Gọi M, N là hai điểm di động trên Ax, By sao cho $AM = BN$. Lấy P là điểm sao cho $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA}$. Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh :

- MP có phương không đổi và MN luôn song song một mặt phẳng cố định.
- Khi M, N di động thì I luôn di động trên một đường thẳng cố định.

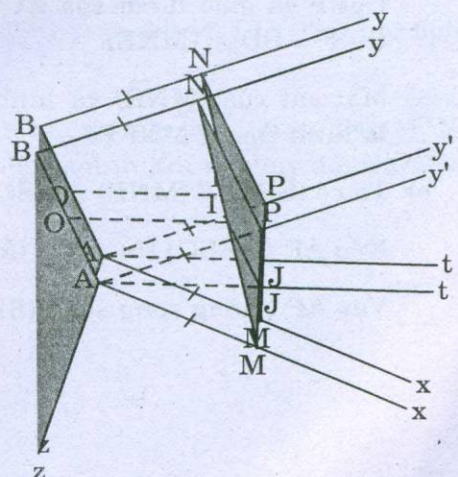
a) • Do $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA}$ nên $P \in Ay'$ cố định sao cho : $Ay' \parallel By$.

Ta có : $AP = AM$ (vì cùng bằng BN)

Gọi J trung điểm MP thì $AJ \perp MP$.

Do đó MP luôn song song với một đường cố định là phân giác ngoài Az của $\widehat{xAy'}$ cố định.

- Ta có : $NP \parallel AB$ và $MP \parallel Az$
 Vậy $mp(MNP) \parallel mp(AB, Az)$
 mà $MN \subset mp(MNP)$
 nên $MN \parallel mp(AB, Az)$ cố định.



b) Gọi O trung điểm AB.

Ta có : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$ mà $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA}$ nên $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OA}$

Do đó : $OI \parallel At$.

Vậy khi M, N di động thì trung điểm I của MN luôn di động trên đường thẳng cố định qua O và song song At là tia phân giác của $\widehat{xAy'}$ cố định ■

BT8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ($AD \parallel BC$, $AD > BC$).
Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA.

- Chứng minh MN song song (SBC), (MEN) song song (SBC).
- Tìm giao điểm F của (MNE) và SD. Xác định thiết diện của (MNE) với hình chóp.
- Chứng minh SC song song (MNE), AF có song song (SBC) không ?

a) Ta có $MN \parallel BC$ mà $BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow MN \parallel (SBC)$

Ta có $MN \parallel (SBC)$, $ME \parallel (SBC)$

$\Rightarrow (MEN) \parallel (SBC)$.

b) Mp (MNE) chứa $MN \parallel AD$.

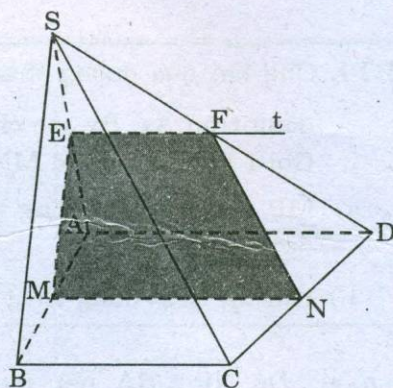
Vậy (MNE) cắt (SAD) theo giao tuyến Et qua M và song song AD.
Gọi F là giao điểm của Et và SD
thì $F = SD \cap (MNE)$.

Mặt cắt của (MNE) và hình chóp là hình thang MNFE.

c) Ta có $(SBC) \parallel (MNE)$ mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow SC \parallel (MNE)$.

Nếu $AF \parallel (SBC)$ thì $AF \subset (MNE) \Rightarrow AF \in (MNE)$ (vô lí)

Vậy AF không song song (SBC) ■



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho mặt phẳng (P) và điểm A nằm ngoài (P). Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng qua A và song song (P) đều nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song (P).
2. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Hai đường thẳng song song a và b. Gọi A, A' lần lượt là giao điểm của a với (P) và (Q). Gọi B, B' lần lượt là giao điểm của b với (P) và (Q). Chứng minh $AA' = BB'$.
3. Từ các đỉnh của tam giác ABC, vẽ các đoạn thẳng AA' , BB' , CC' song song và bằng nhau không nằm trong mặt phẳng (ABC). Gọi I, G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACC' , $A'B'C'$. Chứng minh :
 - a) Mặt phẳng (IGK) song song mặt phẳng ($BB'C'C$).
 - b) Mặt phẳng ($A'GK$) song song mặt phẳng (AIB').
4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D'. Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành khi và chỉ khi mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (ABCD).
5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh là hình vuông cạnh a. Lấy M, N trên AD', DB sao cho $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).
 - a) Chứng minh khi x thay đổi thì MN luôn song song mặt phẳng cố định.
 - b) Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì MN song song A'C.
6. Cho tứ diện ABCD. Hai điểm M, N di động trên AB và CD. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.
7. Cho hai tia Ax và By lần lượt nằm trên hai đường chéo nhau. Lấy M, N trên Ax, By sao cho $AM = BN = m$. Chứng minh khi m thay đổi thì MN luôn song song một mặt phẳng cố định.

Chủ đề 10

TÌM THIẾT DIỆN CỦA ĐA DIỆN TẠO BỞI MẶT PHẶNG SONG SONG VỚI MẶT PHẶNG CHO TRƯỚC

Phương pháp

Sử dụng một trong hai cách sau đây :

- Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song thì hai giao tuyến của chúng song song với nhau.
- Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ mà a nằm trong (α) thì $a \parallel (\beta)$ rồi áp dụng như chủ đề 9.

BT1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) song song với mp $(ABCD)$ cắt SA, SB, SC, SD tại M, N, P, Q . Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

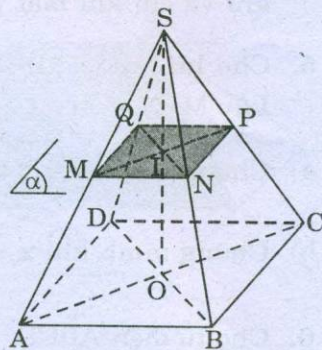
Mp (SAB) cắt hai mặt phẳng song song (α) và $(ABCD)$ theo hai giao tuyến $MN \parallel AB$.

Mp (SCD) cắt hai mặt phẳng song song (α) và $(ABCD)$ theo hai giao tuyến $PQ \parallel CD$.

Mà $AB \parallel CD \Rightarrow MN \parallel PQ$

Tương tự : $MQ \parallel NP \parallel AD \parallel BC$

Do đó $MNPQ$ là hình bình hành ■



BT2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , mặt bên $\triangle SDB$ đều, $AC = a$, $BD = b$. Lấy I trên đoạn AO . Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song mp (SBD) . Xác định và tính diện tích mặt cắt của (α) và hình chóp theo a, b và $x = AI$ $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

- Ta có mp $(\alpha) \parallel$ mp (SBD) nên mp $(ABCD)$ cắt hai mặt này theo hai giao tuyến MIN và BD song song nhau.

Tương tự : mp (SAD) cắt mp (α) và mp (SBD)

theo hai giao tuyến $NK \parallel SD$.

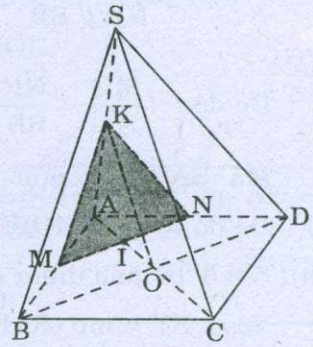
Tương tự : mp (SBA) cắt mp (α) và mp (SBD) theo hai giao tuyến $MK \parallel SB$.

Mà ΔSBD đều nên mặt cắt là ΔMKN đều.

• Ta có : $MN \parallel BD \Rightarrow \frac{AI}{AO} = \frac{MN}{BD}$

$$\Rightarrow MN = \frac{AI}{AO} \cdot BD = \frac{2x}{a} \cdot b$$

Vậy : $dt(\Delta KMN) = MN^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2 x^2}{a^2} \cdot \sqrt{3}$ ■



BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang có AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ. Mặt bên (SAB) là tam giác cân tại S. Gọi (α) là mặt phẳng di động song song mp (SAB), (α) cắt AD, BC, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b) Chứng minh giao điểm của MQ và NP di động trên một đường thẳng cố định khi mp (α) di động.

a) Ta có : mp (SAB) $\parallel$ mp (α) nên mp (ABCD) cắt hai mặt phẳng này theo giao tuyến $AB \parallel MN$ (1)

mp (SCD) cắt hai mặt phẳng này theo giao tuyến $CD \parallel PQ$ (2)

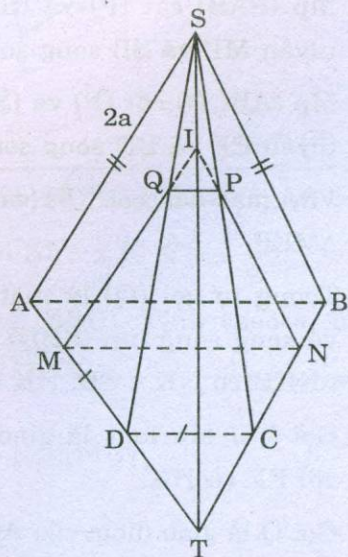
Mà $AB \parallel DC$ nên $PQ \parallel MN$.

Mặt phẳng (SAD) cắt (SAB) và mp (α) theo giao tuyến MQ $\parallel$ SA.

Mp (SBC) cắt mp (SAB) và mp (α) theo giao tuyến NP $\parallel$ SB.

Ta có : $MQ \parallel SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA}$

$MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB}$



$$NP \parallel SB \Rightarrow \frac{CN}{CB} = \frac{NP}{SB}$$

$$\text{Do đó : } \frac{MQ}{SA} = \frac{NP}{SB}$$

Mà $SA = SB$ nên $MQ = NP$

Do đó tứ giác MQPN là hình thang cân.

b) Gọi T là giao điểm AD và BC.

Vậy $ST = mp(SAD) \cap mp(SBC)$.

$$I \in MQ \Rightarrow I \in mp(SAB)$$

$$I \in NP \Rightarrow I \in mp(SBC)$$

Vậy I di động trên giao tuyến ST ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC.

a) Xác định mặt cắt của hình chóp với hai mặt phẳng lần lượt qua M và N song song mặt phẳng (SBD).

b) Gọi I, J là giao điểm hai mặt phẳng trên với AC. Chứng minh $AC = 2IJ$.

a) Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song mp (SBD).

Mp (SAB) cắt (P) và (SBD) theo giao tuyến ME và SB song song nhau.

Mp (ABCD) cắt (P) và (SBD) theo giao tuyến EF và BD song song nhau.

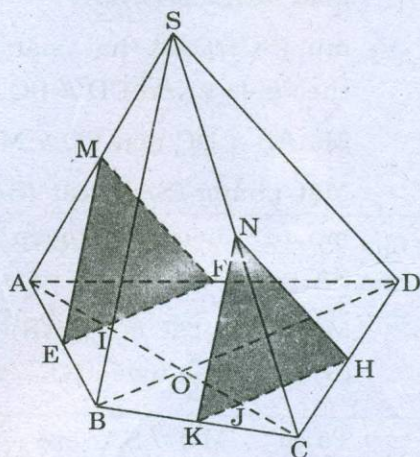
Vậy mặt cắt của (P) và hình chóp là $\triangle MEF$.

Tương tự gọi (Q) là mặt phẳng qua N và song song mp (SBD) thì mặt cắt là $\triangle NKH$ có $NK \parallel SB$, $HK \parallel BD$.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của AC với EF và HK.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có ME là đường trung bình của $\triangle SAB \Rightarrow E$ là trung điểm của AB.



IE là đường trung bình của $\triangle ABO \Rightarrow I$ là trung điểm của AO.

Tương tự K, J lần lượt là trung điểm của BC và OC.

$$\text{Vậy } IJ = IO + OJ = \frac{OA}{2} + \frac{OC}{2} = \frac{AC}{2} \quad \blacksquare$$

BT5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD có đáy lớn AD = 2BC. Gọi E là trung điểm AD và O là giao điểm AC và BE. Lấy I là điểm trên đoạn OC. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song (SBE). Xác định mặt cắt của (α) và hình chóp S.ABCD.

Dễ thấy BEDC là hình bình hành.

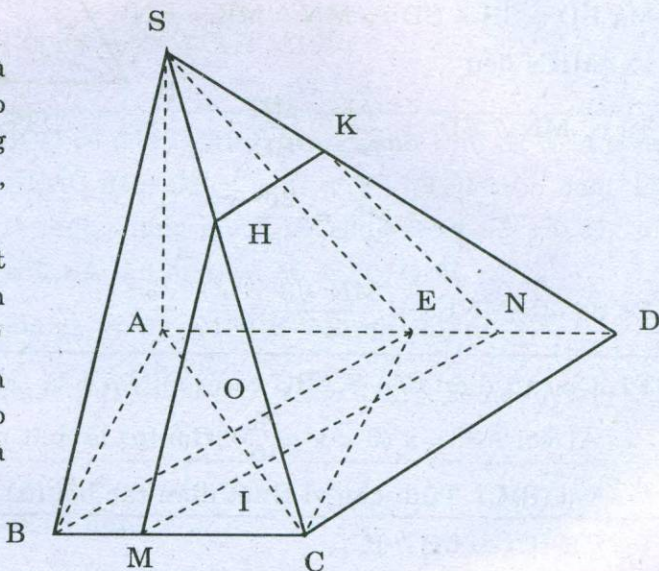
Do $(\alpha) \parallel (SBE)$ nên

- mp(ABCD) cắt (α) và (SBE) theo hai giao tuyến BE và MN song song nhau (MN qua I, $M \in BC$, $N \in ED$)

- SB $\parallel (\alpha)$ nên (SBC) cắt (α) theo giao tuyến MH $\parallel SB$ (với $H \in SC$)

CD $\parallel EB \parallel (\alpha)$ nên (SCD) cắt (α) theo giao tuyến HK $\parallel CD$ và $K \in SD$

Do đó mặt cắt của (α) và hình chóp S.ABCD là hình thang HKNM.



BT6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O, $AC = a$; $BD = b$, $\triangle SBD$ đều. Gọi I trên đoạn OA với $AI = x$ ($0 < x < \frac{a}{2}$).

Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song (SBD). Tính theo a, b, x diện tích mặt cắt của (α) với hình chóp S.ABCD.

$(\alpha) \parallel (SBD) \Rightarrow (\alpha) \parallel BD$

Vậy (α) cắt (ABCD) theo giao tuyến MN $\parallel BD$ ($I \in MN$)

$(\alpha) \parallel (SBD) \Rightarrow (\alpha) \parallel SB$

Vậy (α) cắt (SAB) theo giao tuyến MK $\parallel SB$

$(\alpha) \parallel (SBD) \Rightarrow (\alpha) \parallel KN$

Vậy (α) cắt (SAD) theo giao tuyến $KN \parallel SA$.

$$\text{Do } MN \parallel BD \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} \quad (1)$$

$$\text{Do } MK \parallel SB \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MK}{SB} \quad (2)$$

$$\text{Do } NK \parallel SD \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{KN}{SD} \quad (3)$$

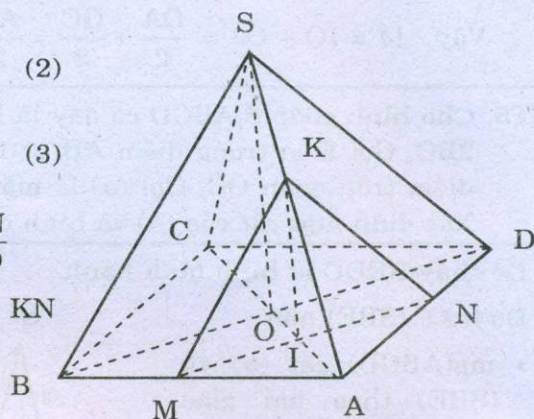
$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{MK}{SB} = \frac{KN}{SD}$$

Mà $BD = SB = SD \Rightarrow MN = MK = KN$
 $\Rightarrow \Delta MNK$ đều

$$\text{Ta có } MN \parallel BD \Rightarrow \frac{AI}{AO} = \frac{MN}{BD}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{2bx}{a}$$

$$\text{Do đó } dt(\Delta MNK) = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{b^2 x^2 \sqrt{3}}{a^2}.$$



BT7. Cho tứ diện đều $S.ABC$ cạnh a . Gọi I là trung điểm AB . Lấy M trên AI với $AM = x$ ($0 < x < \frac{a}{2}$). Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SIC) . Tính chu vi thiết diện tạo bởi (α) và $S.ABC$.

$$(\alpha) \parallel (SIC) \Rightarrow (\alpha) \parallel IC$$

Vậy (α) cắt (ABC) theo giao tuyến $MN \parallel IC$

$$(\alpha) \parallel (SIC) \Rightarrow \alpha \parallel SI$$

Vậy (α) cắt (SAB) theo giao tuyến $MP \parallel SI$.

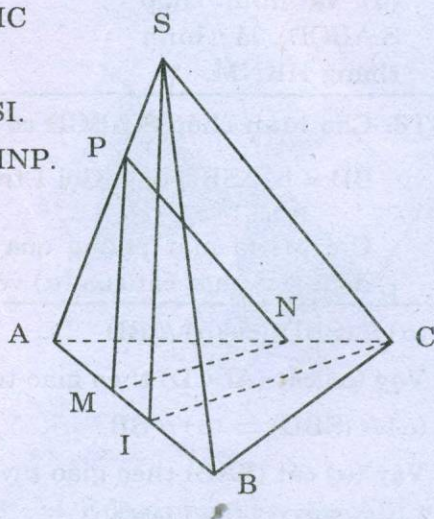
Vậy mặt cắt của (α) và chóp $S.ABC$ là ΔMNP .

$$MN \parallel IC \Rightarrow \frac{AM}{AI} = \frac{MN}{IC} \quad (1)$$

$$MP \parallel SI \Rightarrow \frac{AM}{AI} = \frac{MP}{SI} \quad (2)$$

$$\text{Vậy } \frac{MN}{IC} = \frac{MP}{SI}$$

$$\text{Mà } SI = IC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MN = MP$$



$$\text{Từ (1)} \Rightarrow MN = \frac{AM}{AI} \cdot IC = \frac{2x}{a} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$$

$$(\alpha) // (SIC) \Rightarrow (\alpha) // SC$$

Vậy (α) cắt (SAC) theo giao tuyến $NP // SC$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AI} = \frac{AN}{AC} = \frac{NP}{SC}$$

$$\Rightarrow NP = \frac{AM}{AI} \cdot SC = 2x$$

Do đó: Chu vi $(\Delta MPN) = 2MN + NP$

$$= 2x\sqrt{3} + 2x = (1 + \sqrt{3})2x$$

BT8*. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , E là trung điểm SB . Biết rằng ΔEAC đều, $DB = 2AC = 2a$. Lấy I trên đoạn OD với $DI = x$. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và song song $mp(ACE)$. $mp(\alpha)$ cắt AD, CD, SC, SB, SA lần lượt tại M, N, P, Q, R .

a) Chứng minh ΔQPR đều và tứ giác $MNPR$ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích ngũ giác $MNPQR$ theo a và x . Tìm x sao cho diện tích này lớn nhất.

a) Ta có : $mp(\alpha) // mp(ACE)$ nên

• $mp(ABCD)$ cắt hai mặt phẳng theo hai giao tuyến $MIN // AC$ (1)

• $mp(SBD)$ cắt hai mặt phẳng theo hai giao tuyến $IQ // OE // SD$ (2)

• $mp(SAB)$ cắt hai mặt phẳng theo hai giao tuyến $RQ // AE$ (3)

• $mp(SBC)$ cắt hai mặt phẳng theo hai giao tuyến $PQ // EC$ (4)

• $mp(SAC)$ cắt hai mặt phẳng theo hai giao tuyến $PR // AC$ (5)

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow \Delta RQP$ đều.

Mặt khác : $mp(\alpha)$ chứa $IQ // SD$,

vậy (α) cắt $mp(SAD)$ theo giao tuyến $RM // SD$ (6)

và $mp(SDC)$ theo giao tuyến $PN // SD$ (7)

Từ (5), (6) và (7) $\Rightarrow RMNP$ là hình bình hành.

Mà ΔEAC đều $\Rightarrow OE \perp AC$

Do đó $MR \perp MN$ nên $RMNP$ là hình chữ nhật.

$$\begin{aligned} \text{b) Do } MN \parallel AC &\Rightarrow \frac{MN}{AC} = \frac{DI}{DO} \\ &\Rightarrow MN = \frac{AC}{OD} \cdot DI = x \end{aligned}$$

$$\Delta AEC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow SD = a\sqrt{3}$$

$$\text{Do } MI \parallel AO \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{OI}{OD}$$

$$\text{Do } MR \parallel SD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{MR}{SD}$$

$$\text{Vậy } \frac{OI}{OD} = \frac{MR}{SD} \Rightarrow MR = \frac{OI}{OD} \cdot SD = \frac{a-x}{a} \cdot a\sqrt{3} = \sqrt{3}(a-x)$$

$$\text{Do đó : dt (RQPNM) = dt } (\Delta RPQ) + \text{dt (RMNP)}$$

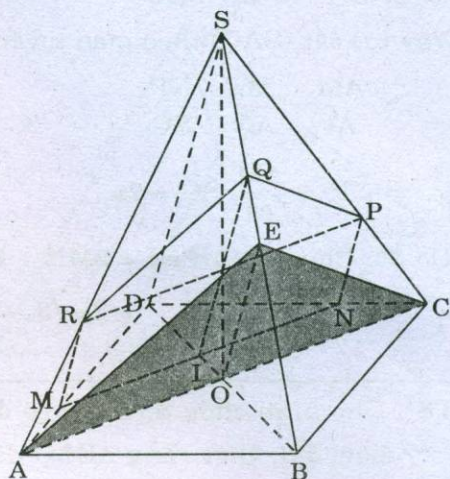
$$= RP^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + RM \cdot MN = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} + \sqrt{3}x(a-x)$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 + \sqrt{3}xa = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x^2 - \frac{4}{3}ax\right)$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 - \frac{4}{9}a^2\right]$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

$$\text{Do đó : dt (RQPNM) max} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}a \quad \blacksquare$$



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, AB song song CD. Lấy M trên BC ($M \neq B$ và C).
 - a) Xác định mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng qua M và song song mặt phẳng (SAB).
 - b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với SD và SC. Chứng minh rằng giao điểm của NE và MF di động trên một đường thẳng cố định.
2. Cho hình chóp S.ABC. Gọi (α) là mặt phẳng di động song song với mặt phẳng (SAC), (α) cắt SA, SB, SC lần lượt tại M, N, K. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng (MBC), (NAC), (KAB).
3. Cho hình vuông ABCD và tam giác SAB đều nằm trong hai mặt phẳng. Lấy M di động trên AB. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song mặt phẳng (SBC). Tìm mặt cắt của (α) và hình chóp.
4. Cho hình chóp tứ diện đều SABC cạnh a. Gọi I là trung điểm của AB. Lấy M di động trên AI với $AM = x$. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song mặt phẳng (SIC). Tính chu vi thiết diện của (α) và tứ diện.
5. Cho hình thang ABCD vuông tại A và D với $AD = DC = a$, $AB = 2a$. Gọi S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (ABCD) sao cho tam giác SAB vuông cân tại A. Lấy M trên AD sao cho $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt phẳng (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.
 - a) Tính chu vi và diện tích thiết diện MNPQ theo a và x.
 - b) Tìm tập hợp giao điểm I của MP và NQ khi x thay đổi.

HÌNH LĂNG TRỤ

Định nghĩa : Hình lăng trụ là một khối đa diện có hai đáy là hai đa giác có các cạnh song song và bằng nhau, các cạnh bên song song và bằng nhau.

Hình hộp là một lăng trụ có đáy là hình bình hành. Bốn đường chéo của hình hộp đồng quy tại trung điểm mỗi đường. Điểm đó gọi là tâm của hình hộp.

BT1. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle A'B'C', \triangle ACC'$. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm $BC, B'C', AC$. Chứng minh :

- $mp(IJK)$ song song $mp(BB'C'C)$.
- $mp(A'JK)$ song song $mp(AIB')$.

a) Gọi O là trung điểm của AC' .

Ta có tứ giác $IMNJ$ là hình bình hành

$$\Rightarrow IJ \parallel MN \quad (1)$$

Ta có :
$$\frac{HI}{HB} = \frac{HK}{HC'} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow IK \parallel BC' \quad (2)$$

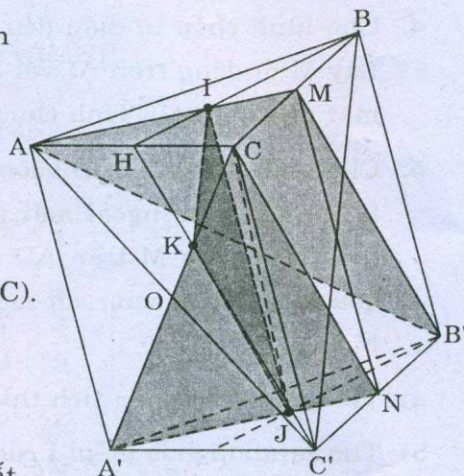
Từ (1) và (2) $\Rightarrow mp(IKJ) \parallel mp(BB'C'C)$.

b) Do $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ nên $AM \parallel A'N$

Do $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NB'}$ nên $CN \parallel MB'$

Mà CN và $A'N$ là hai đường thẳng cắt nhau nằm trong $mp(A'JK)$ và AM, MB' là hai đường thẳng cắt nhau nằm trong $mp(AIB')$.

Do đó $mp(A'JK) \parallel mp(AIB')$ ■



BT2. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G và G' là trọng tâm $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$. Chứng minh các $mp(ABC')$, $mp(BCA')$, $mp(ACB')$ cắt nhau tại O trên GG' . Tính $\frac{OG}{OG'}$.

- Gọi I và I' lần lượt là trung điểm BC và B'C'.
- Gọi H, J, K lần lượt là tâm các hình bình hành ABB'A', BCC'B', ACC'A'.

Ta có : $mp(ABC') \cap mp(BCA') = BK$

$$mp(ABC') \cap mp(ACB') = AJ$$

Trong $mp(ABC')$, AJ cắt BK tại O là trọng tâm $\Delta ABC'$

Vậy ba mặt phẳng (ABC') , (BCA') , (ACB') cắt nhau tại O.

- Ta có G và O là trọng tâm ΔABC và $\Delta ABC'$

$$\Rightarrow \frac{AG}{AI} = \frac{AO}{AJ} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow OG \parallel II' \quad (1)$$

Ta có $GII'G'$ là hình bình hành

$$\Rightarrow GG' \parallel II' \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O, G, G'$ thẳng hàng

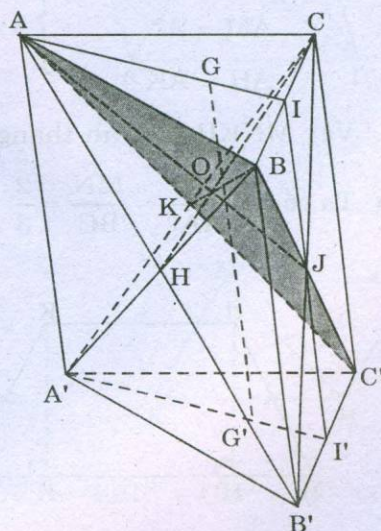
$$\Rightarrow O \in GG'.$$

$$\bullet \quad G'G \parallel IJ \Rightarrow \frac{OG}{IJ} = \frac{AG}{AI} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow OG = \frac{2}{3}IJ = \frac{II'}{3}$$

$$\text{Mà } GG' = II' \Rightarrow OG = \frac{1}{3}GG'.$$

$$\text{Do đó : } \frac{OG}{OG'} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$



BT3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ là hình vuông có tâm lần lượt là I và J. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

- Chứng minh IJ song song $mp(ABC)$.
- Xác định thiết diện của lăng trụ với $mp(IJO)$. Tính diện tích thiết diện đó theo a .

$$\text{a) } \Delta AB'C' \text{ có } IJ \parallel B'C' \text{ mà } B'C' \parallel BC \Rightarrow IJ \parallel BC$$

Vậy $IJ \parallel mp(ABC)$.

- Ta có : $IJ \parallel mp(ABC)$

mà $mp(OIJ) \cap mp(ABC) = MN$

thì $MN \parallel IJ \parallel BC$.

- Trên $mp(AA'C'C)$, MJ cắt $A'C'$ tại H .

- Do $IJ \parallel B'C' \Rightarrow IJ \parallel mp(A'B'C')$

Vậy $mp(OIJ) \cap mp(A'B'C') = HK \parallel B'C'$.

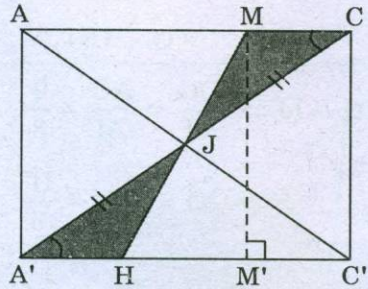
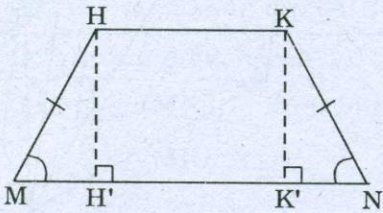
Mặt cắt là tứ giác $MNKH$ có $MN \parallel HK$.

Ta có $A'A$ cạnh chung

$$\left. \begin{array}{l} AM = AN \\ AH = AK \end{array} \right\} \Rightarrow MH = NK$$

Vậy $MNKH$ là hình thang cân.

- Ta có : $\frac{AO}{AA_1} = \frac{MN}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3}a$



$$\text{Ta có : } \triangle JMC = \triangle JA'H \Rightarrow A'H = \frac{a}{3} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$$

$$\text{Ta có : } 2MH' = MN - HK = \frac{a}{3} \Rightarrow MH' = \frac{a}{6}$$

$$\triangle MHH' \text{ vuông} \Rightarrow HM^2 = a^2 + \frac{a^2}{9} = \frac{10a^2}{9}$$

$$\triangle MHH' \text{ vuông} \Rightarrow HH'^2 = \frac{10a^2}{9} - \frac{a^2}{36} = \frac{39a^2}{36}$$

$$\text{Vậy : dt}(HKNM) = \frac{1}{2}(HK + MN) \cdot HH' = \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{3} + \frac{a}{3} \right) \cdot \frac{a\sqrt{39}}{6} = \frac{a^2}{12} \sqrt{39} \quad \blacksquare$$

BT4. Chứng minh trong hình hộp các đường chéo đồng quy tại một điểm và tổng các bình phương của bốn đường chéo bằng tổng bình phương các cạnh.

- Do $ACC'A'$ là hình bình hành nên AC' cắt CA' tại trung điểm O mỗi đường.

Do $ABC'D'$ là hình bình hành nên BD' qua O và nhận O là trung điểm.

Do $BDD'B'$ là hình bình hành nên $B'D$ qua O và nhận O là trung điểm.

Vậy AC' , $A'C$, BD' , $B'D$ đồng quy tại O .

- Giả sử hình bình hành $MNHK$ có tâm I .

$$\Delta MNK \Rightarrow MK^2 + MN^2 = 2MI^2 + \frac{NK^2}{2}$$

$$\Rightarrow MK^2 + MN^2 = \frac{MH^2 + NK^2}{2}$$

Do $ABC'D'$ là hình bình hành nên

$$AC'^2 + BD'^2 = 2(AB^2 + AD'^2) \quad (1)$$

Do $CDA'B'$ là hình bình hành nên

$$A'C^2 + DB'^2 = 2(CD^2 + DA'^2) \quad (2)$$

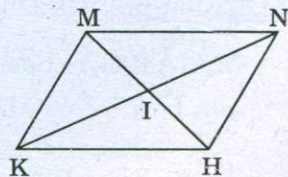
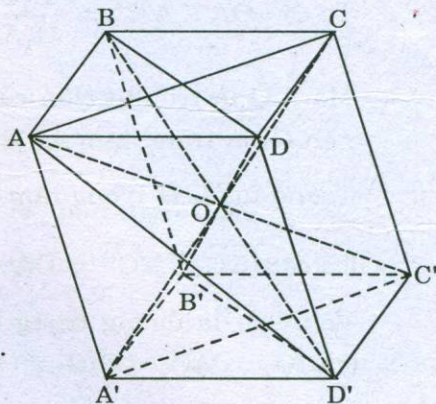
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC'^2 + BD'^2 + A'C^2 + DB'^2 = 2(AB^2 + CD^2 + AD'^2 + DA'^2)$

Mặt khác $ADD'A'$ là hình bình hành nên : $AD'^2 + DA'^2 = 2(AD^2 + AA'^2)$

Đặt $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$

Do đó : $AC'^2 + BD'^2 + A'C^2 + DB'^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy tổng bình phương bốn đường chéo bằng tổng bình phương 12 cạnh của hình hộp ■



BT5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Chứng minh AC' đi qua trọng tâm G_1 , G_2 của $\Delta BDA'$ và $\Delta B'D'C$.
Chứng minh G_1 , G_2 chia AC' làm ba phần bằng nhau.

- b) Xác định thiết diện của mp $(A'B'G_2)$ và hình hộp.

- a) Gọi O , O' là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Trên mp $(ACC'A')$, AC' cắt OA' và $O'C$ tại G_1 , G_2 .

$$\text{Ta có : } OA \parallel A'C' \Rightarrow \frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2}$$

Mà $A'O$ là trung tuyến của $\Delta A'BD$ nên G_1 là trọng tâm $\Delta A'BD$.

Tương tự G_2 là trọng tâm $\Delta CB'D'$.

$$\bullet \text{ Ta có : } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{A'O'} \Rightarrow OA' \parallel O'C'$$

Vậy OG_1 là đường trung bình của $\Delta ACG_2 \Rightarrow AG_1 = G_1G_2$.

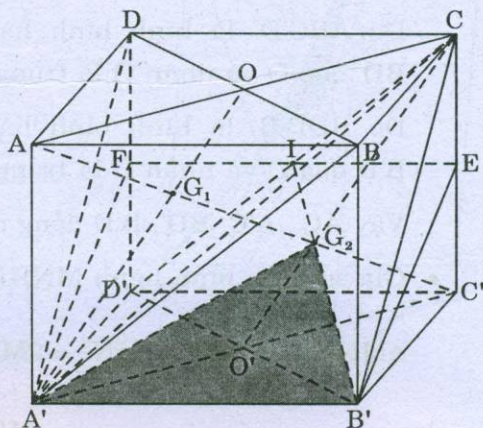
Tương tự $O'G_2$ là đường trung bình của $\Delta G_1C'A' \Rightarrow G_1G_2 = G_2C'$.

$$\text{Vậy } AG_1 = G_1G_2 = G_2C'.$$

b) Trong mp $(CB'D')$, $B'G_2$ cắt CD' tại trung điểm I của CD' .

Mp $(A'B'G_2)$ chứa $A'B' \parallel C'D'$, vậy cắt mp $(C'D'DC)$ theo giao tuyến EF qua I và $EF \parallel C'D' \parallel A'B'$.

Ta có $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{B'A'}$ nên mặt cắt $A'B'EF$ là hình bình hành ■



BT6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có H là trung điểm $A'B'$.

- Chứng minh CB' song song mặt phẳng (AHC') .
- Tìm giao điểm của AC' và mặt phẳng (BCH) .
- Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của CC' song song AH và CB' . Xác định thiết diện và tỉ số mà các đỉnh của thiết diện chia các cạnh tương ứng của lăng trụ.

a) Gọi K là trung điểm của AB .

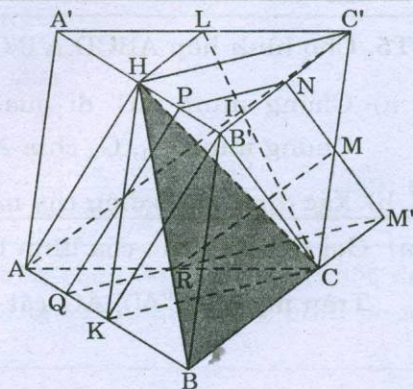
Ta có $AH \parallel B'K$ và $HC' \parallel KC$

Vậy $(AHC') \parallel (B'KC)$.

Mà $CB' \subset (B'KC) \Rightarrow CB' \parallel (AHC')$.

b) Gọi L là trung điểm của $A'C'$ thì $HL \parallel B'C' \parallel BC$. Vậy $L \in (HBC)$.

Trong mp $(ACC'A')$, AC' cắt CL



tại I thì $I = AC' \cap (HBC)$.

c) $(\alpha) // CB'$ mà $CB' \subset (BCC'B')$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (BCC'B') = MN // CB' (N \in B'C')$.

Trong mp $(B'C'CB)$, $BC \cap MN = M'$.

Ta có $AH // B'K \Rightarrow B'K // (\alpha)$ mà $B'C // (\alpha)$ nên $(\alpha) // (B'KC)$.

Vậy (ABC) cắt hai mặt phẳng song song (α) và $(B'KC)$ theo hai giao tuyến $KC // M'RQ$ với $R \in AC, Q \in AB$.

Mp $(A'B'BA)$ cắt hai mặt phẳng song song (α) và $(B'KC)$ theo hai giao tuyến $QP // KB'$ với $P \in A'B'$.

Mp $(BCC'B')$ cắt hai mặt phẳng song song (α) và $(B'KC)$ theo hai giao tuyến $MN // B'C$ với $N \in B'C'$.

Do đó thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.

Ta có N và P lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và HB' . Do đó $\frac{PA'}{PB'} = 3$.

Tương tự R và Q lần lượt là trung điểm của AC và AK . Do đó $\frac{QA}{QB} = \frac{1}{3}$.

Do đó M, N, P, Q, R chia theo thứ tự $CC', B'C', A'B', AB, AC$ theo tỉ số $1, 1, 3, \frac{1}{3}, 1$.

BT7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy M trên AD, N trên D'C' sao cho

$$\frac{AM}{MD} = \frac{D'N}{NC'}.$$

a) Chứng minh MN song song mặt phẳng $(C'BD)$.

b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua MN và song song mặt phẳng $(C'BD)$. Xác định mặt cắt của (Q) và hình hộp.

a) Ta có $\frac{AM}{MD} = \frac{D'N}{NC'} \Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AM + MD}{D'N + NC'} = \frac{AD}{C'D'}$

Do định lí Thalès đảo, ba đường thẳng MN, AD', DC' cùng song song mp (P) nhưng $AD' // BC'$.

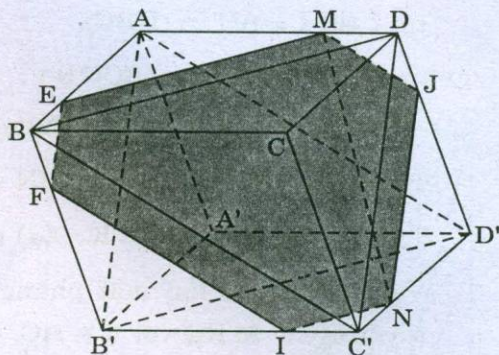
Vậy mp (P) song song $(C'BD)$

Do đó $MN // (C'BD)$.

- b) $M_p(Q) \parallel (C'BD)$, vậy $(ABCD)$ cắt hai mặt phẳng này theo hai giao tuyến ME và BD song song nhau ($E \in AB$).

Tương tự $(ABB'A')$ cắt hai mặt song song (Q) và $(C'BD)$ theo giao tuyến $EF \parallel AB'$ ($F \in BB'$).

Lập luận tương tự vẽ $FI \parallel BC'$ ($I \in B'C'$).



Thiết diện của (Q) và hình lập phương là lục giác $MEFINJ$ ■

BT8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O' là tâm hình bình hành $A'B'C'D'$, K là trung điểm của CD , E là trung điểm của BO' .

- Chứng minh điểm E thuộc mặt phẳng (ACB') .
- Xác định mặt cắt của hình hộp và mặt phẳng (α) qua K và song song (EAC) .

- a) Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Tứ giác $B'O'OB$ là hình bình hành nên E là trung điểm của $B'O$.

Mà $B'O \subset (B'AC) \Rightarrow E \in (B'AC)$.

- b) Do $E \in (ACB')$ nên $(EAC) \equiv (B'AC)$
 $M_p(ABCD)$ cắt hai mặt phẳng song song (α) và $(B'AC)$ theo hai giao tuyến $AC \parallel KI$ ($I \in AD$).

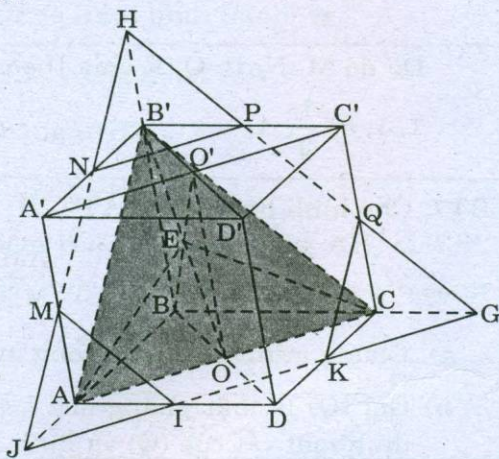
Trong mp $(ABCD)$, AB cắt KI tại J .

$M_p(A'B'BA)$ cắt hai mặt phẳng song song (α) và $(B'AC)$ theo hai giao tuyến $JMN \parallel B'A$ ($M \in AA'$, $N \in A'B'$).

Trong mp $(A'B'BA)$, MN cắt BB' tại H .

$M_p(B'C'CB)$ cắt hai mặt phẳng song song (α) và $(B'AC)$ theo hai giao tuyến $B'C \parallel HPQ$ ($P \in B'C'$, $Q \in CC'$).

Mặt cắt là lục giác $KIMNPQ$ ■



BT9. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và CC' , P là điểm đối xứng của C qua A . Xác định mặt cắt của lăng trụ với:

a) $M_p(A'MN)$. Tính tỉ số mà mặt cắt chia cạnh AB .

b) $M_p(MNP)$. Tính tỉ số mà mặt cắt chia cạnh AA' và AB .

a) Trong $m_p(BB'C'C)$

Gọi I là giao điểm BB' và MN .

Trong $m_p(ABB'A')$ gọi H là giao điểm $A'I$ và AB

Vậy mặt cắt của $(A'MN)$ và lăng trụ là tứ giác $HMNA'$.

$$\triangle MBI = \triangle MCN \Rightarrow IB = CN = \frac{1}{2} CC'$$

$$\text{Do: } HB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{IH}{IA'} = \frac{IB}{IB'} = \frac{HB}{A'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{A'B'} = \frac{\frac{1}{2} CC'}{\frac{3}{2} BB'} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow HB = \frac{1}{3} AB.$$

b) Trong $m_p(ABC)$ gọi R là giao điểm PM và AB

Trong $m_p(ACC'B')$ gọi S là giao điểm PN và AA'

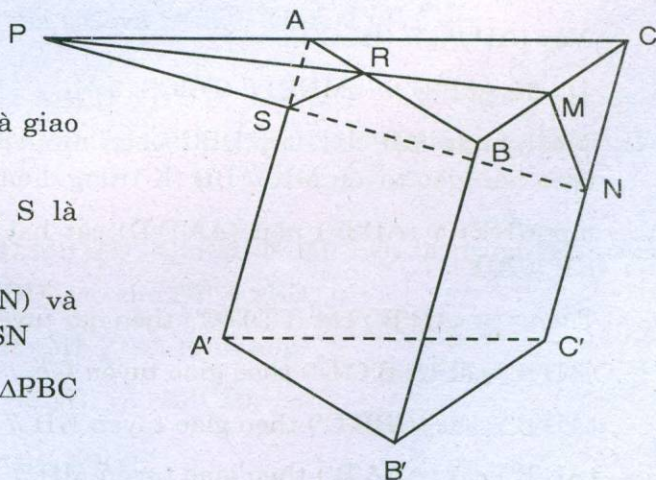
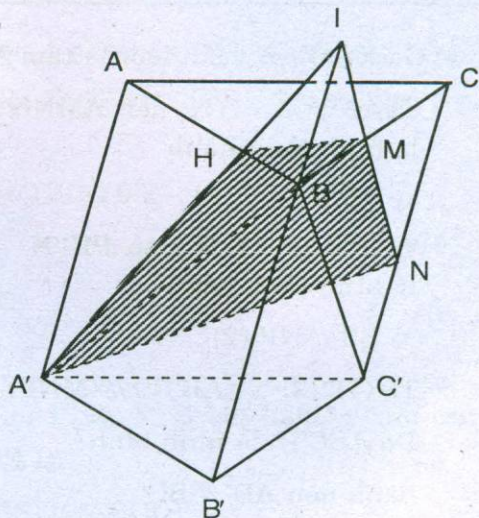
Vậy mặt cắt của (PMN) và lăng trụ là tứ giác $MRSN$

Ta có R là trọng tâm $\triangle PBC$

$$\text{nên } AR = \frac{1}{3} AB.$$

Ta có SA là đường trung bình của $\triangle PCN$ nên

$$AS = \frac{1}{2} CN = \frac{1}{4} CC' = \frac{1}{4} AA'.$$



BT10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm $AB, B'C'$ và DD' .

a) Chứng minh $mp(MNP)$ song song với các mặt phẳng $(AB'D')$ và (BDC')

b) Xác định mặt cắt của (MNP) và hình lập phương.

a) Gọi O, O' và I lần lượt là tâm hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ và $ADD'A$

Ta có $\overline{AM} = \overline{O'N}$ nên $AMNO'$ là hình bình hành

$\Rightarrow AO' \parallel MN$ (1)

Ta có: $\overline{IP} = \overline{B'N}$ nên $PIB'N$ là hình bình hành

$\Rightarrow B'I \parallel NP$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow (AB'D') \parallel (MNP)$

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC'$

Do $DBB'D'$ là hình bình hành nên $DB \parallel D'B'$

Vậy $(AD'B') \parallel (DBC')$

Do đó: $(AB'D') \parallel (MNP) \parallel (DBC')$

b) Mặt phẳng $(MPN) \parallel mp(DBC')$ nên $mp(ABCD)$ cắt hai mặt phẳng này theo hai giao tuyến $MK \parallel BD$ (K trung điểm AD)

$mp(MNP) \parallel (AD'B')$ nên $(AA'D'D)$ cắt hai mặt phẳng theo giao tuyến $KP \parallel AD'$

Tương tự $(AD'B')$ cắt $(CDD'C')$ theo hai tuyến $PG \parallel DC'$

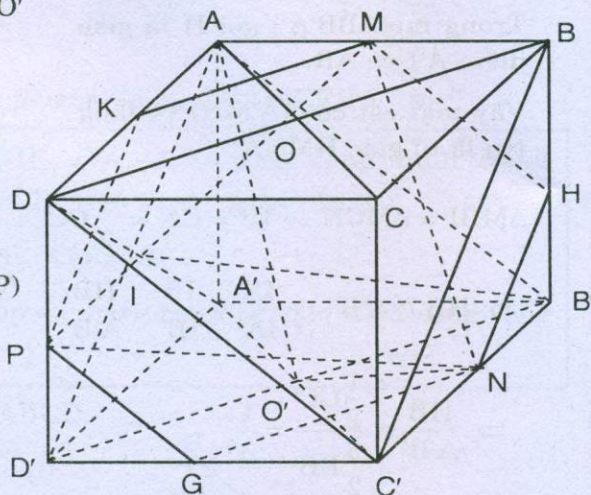
$(AD'B')$ cắt $(A'B'C'D')$ theo giao tuyến $GN \parallel B'D'$

$(AD'B')$ cắt $(CBB'C')$ theo giao tuyến $NH \parallel BC'$

$(AD'B')$ cắt $(ABA'B')$ theo giao tuyến $MH \parallel AB'$

Do đó mặt cắt của (MNP) và hình lập phương là lục giác đều $MKPGNH$

cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của BC và AI . Gọi (α) là mặt phẳng qua M song song với AC' và $B'C$. Tìm mặt cắt của (α) và lăng trụ. Tính tỉ số mà mặt cắt chia CC' .
2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm các hình bình hành $ACC'A', BCC'B', ABB'A'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh :
 - a) $IJ \parallel (ABB'A'), JK \parallel (ACC'A'), IK \parallel (BCC'B')$.
 - b) AJ, CK, BI đồng quy tại O .
 - c) $(IJK) \parallel (ABC)$.
 - d) Ba điểm G, O, G' thẳng hàng.
3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi P, Q, R, S lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CDC'D', DAA'D'$.
 - a) Chứng minh $RQ \parallel (ABCD), (PQRS) \parallel (ABCD)$.
 - b) Xác định thiết diện hình hộp và mặt phẳng (ARQ) .
 - c) Gọi M là giao điểm của CC' và (ARQ) . Tính tỉ số $\frac{MC}{MC'}$.
4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của $AB, DD', B'C'$. Dựng thiết diện của hình lập phương với $(EFC), (EFC'), (EFK)$.
5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và CC' . Lấy P trên DD' sao cho $DP = 2PD'$.
 - a) Xác định mặt cắt của (MNP) và hình hộp.
 - b) Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.
6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
 - a) Tìm giao tuyến d của $(AB'C')$ và $(A'BC)$.
 - b) Chứng minh $d \parallel (BB'C'C)$.
 - c) Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Chứng minh $CB' \parallel (AHC')$.

7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $(ABD') \parallel (C'BD)$.

b) Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AA' , BB' , CC' .

Chứng minh $(ABCD) \parallel (EFG)$.

c) Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB , AD , $A'D'$.

Chứng minh $(IJK) \parallel (BDD'B')$.

8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Lấy M, N, P lần lượt trên AB' , AC' , $B'C$

sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{C'N}{AC'} = \frac{CP}{CB'} = x$.

a) Tìm x để $(MNP) \parallel (A'BC')$. Biết tam giác $A'BC'$ đều cạnh a . Tính diện tích mặt cắt bởi (MNP) và lăng trụ.

b) Tìm tập hợp trung điểm của NP khi x thay đổi.

9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Trên AB , CC' , $C'D'$ và AA' lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho :

$$AM = C'N = C'P = AQ = x \quad (0 \leq x \leq a).$$

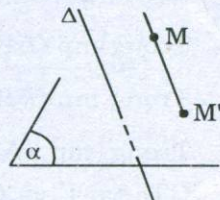
a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ luôn chứa một đường thẳng cố định. Tìm x để $(MNPQ) \parallel (A'BC')$.

c) Tìm thiết diện của $(MNPQ)$ và hình lập phương.

PHÉP CHIẾU SONG SONG

1. **Định nghĩa :** Cho mp (α), đường thẳng Δ không song song (α) và điểm M . Từ M vẽ đường thẳng cùng phương với Δ cắt mp (α) tại M' thì M' gọi là hình chiếu song song của M trên mp (α).



Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu, phương Δ gọi là phương chiếu.

2. **Tính chất :** Phép chiếu song song :

- + Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- + Biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- + Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

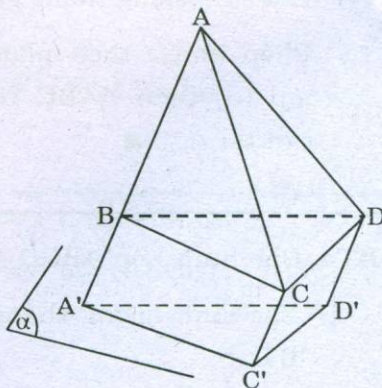
BT1. Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (α) không song song AB. Xác định hình chiếu của tứ diện ABCD theo phương AB lên (α).

Gọi A' là giao điểm của AB và (α) thì hình chiếu của A và B lên (α) theo phương AB là A' .

Từ C vẽ đường thẳng song song với AB cắt (α) tại C' . Hình chiếu của C lên (α) theo phương AB là C' .

Từ D vẽ đường thẳng song song với AB cắt (α) tại D' . Hình chiếu của D lên (α) theo phương AB là D' .

Do đó hình chiếu của ABCD theo phương AB lên (α) là $\Delta A'C'D'$ ■



BT2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA' , BC lần lượt lấy hai điểm M , N . Trong $\Delta A'C'D'$ lấy điểm P .

Xác định thiết diện của hình hộp và mp (MNP) .

Gọi Q là hình chiếu song song của P theo phương AA' xuống mp $(ABCD)$.

Trong mp $(AA'PQ)$, gọi I là giao điểm PM và QA .

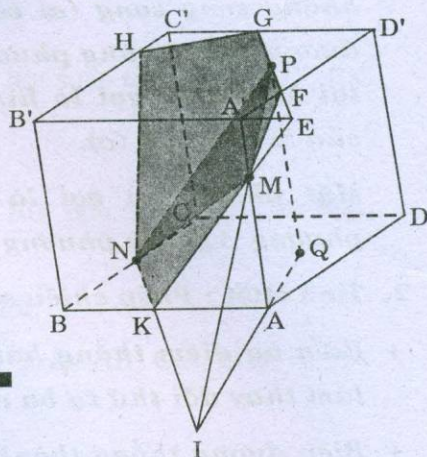
Trong mp $(ABCD)$, IN cắt AB tại K .

Trong mp $(ABB'A')$, MK cắt $A'B'$ tại E .

Trong mp $(A'B'C'D')$, PE cắt $A'D'$ và $C'D'$ tại F và G .

Mp (MNP) cắt hai mặt phẳng song song $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$ theo hai giao tuyến song song MF và HN .

Vậy thiết diện là lục giác $NKMFGH$ ■



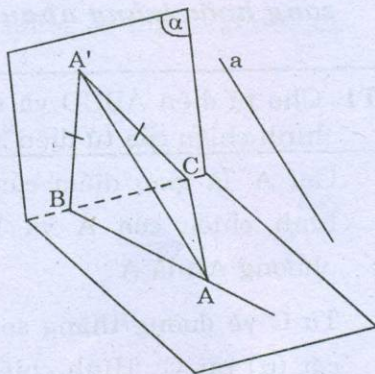
BT3. Cho ΔABC . Gọi $\Delta A'B'C'$ là hình chiếu của ΔABC lên mp (α) theo phương chiếu a . Xác định (α) và a sao cho $\Delta A'B'C'$ cân.

Gọi (α) là mặt phẳng cắt mp (ABC) theo giao tuyến BC .

Trong mp (α) vẽ $\Delta A'BC$ cân tại A' .

Gọi a là đường thẳng song song AA' .

Phép chiếu theo phương a xuống mp (α) biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ cân tại A' ■



BT4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng AC' , BA' và song song $B'D'$.

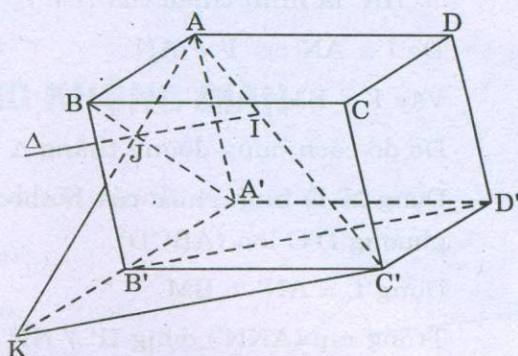
b) Gọi I , J là giao điểm của Δ với AC' và BA' . Tính $\frac{AI}{AC'}$.

- a) Giả sử đã tồn tại Δ cắt BA' tại J , cắt AC' tại I và $IJ \parallel B'D'$.

Xét phép chiếu theo phương $B'D'$ lên mp $(ABB'A')$.

Vẽ $C'K \parallel B'D'$ ($K \in A'B'$)

Phép chiếu này biến 3 điểm thẳng hàng A, I, C' lần lượt thành 3 điểm thẳng hàng A, J, K .



Do đó ta :

- Từ C' vẽ đường song song $B'D'$ cắt $A'B'$ tại K .
 - Nối AK cắt $A'B$ tại J .
 - Từ J vẽ đường song song $C'K$ cắt AC' tại I .
- b) Ta có $KC'D'B'$ là hình bình hành $\Rightarrow C'D' = KB' = A'B'$

$$\text{Do } IJ \parallel KC' \text{ nên } \frac{AI}{AC'} = \frac{AJ}{AK}$$

$$\text{Mà } AB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{AJ}{JK} = \frac{AB}{A'K} = \frac{1}{2} \Rightarrow JK = 2AJ$$

$$\text{Vậy } \frac{AI}{AC'} = \frac{AJ}{AK} = \frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

BT5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC' .

- a) Xác định đường thẳng Δ qua M cắt AN và $A'B$ tại I và J .

- b) Tính tỉ số $\frac{IM}{IJ}$.

- a) Giả sử đã dựng được đường thẳng Δ cắt AN tại I , cắt $A'B$ tại J .

Xét phép chiếu song song theo phương $D'C$ lên mp $(ABCD)$.

Ba điểm J, I, M có hình chiếu là B, I', M .

Do I, J, M thẳng hàng (cùng thuộc Δ)

nên B, I', M thẳng hàng.

Gọi N' là hình chiếu của N

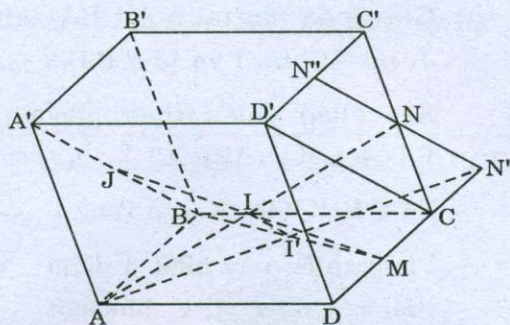
$\Rightarrow AN'$ là hình chiếu của AN .

Do $I \in AN \Rightarrow I' \in AN'$.

Vậy $I' = BM \cap AN'$.

Do đó cách dựng đường thẳng Δ :

- Dựng N' là hình chiếu của N theo phương $D'C$ lên $(ABCD)$.
 - Dựng $I' = AN' \cap BM$.
 - Trong mp (ANN') dựng $II' \parallel NN'$ với $I \in AN$.
 - Dựng MI , đó là đường thẳng Δ cần tìm.
- b) Trong mp $(C'D'DC)$, NN' cắt $C'D'$ tại N'' .



Tứ giác $D'N''N'C$ là hình bình hành $\Rightarrow CN' = D'N'' = \frac{C'D'}{2}$

Vậy $MC = CN' \Rightarrow MN' = AB = CD$. Suy ra I' là trung điểm của BM .

Mặt khác $II' \parallel NN' \parallel A'B$.

Vậy II' là đường trung bình của $\triangle MBJ \Rightarrow \frac{IM}{IJ} = 1$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC . Chọn mặt phẳng (P) và phương chiếu d để hình chiếu của tam giác ABC lên (P) là :
 - a) Tam giác cân.
 - b) Tam giác đều.
 - c) Tam giác vuông.
2. Cho tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác $A'B'C'$. Chứng minh trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.
3. Vẽ hình chiếu của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu AC' với AC' không song song (P) .
4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy điểm I trên $B'D$ và điểm J trên AC sao cho $IJ \parallel BC'$. Tính $\frac{ID}{IB'}$.
5. Xác định mặt cắt của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với mặt phẳng (MNK) khi $M \in (ABCD)$, $N \in (ABB'A')$, $K \in (ADD'A')$.

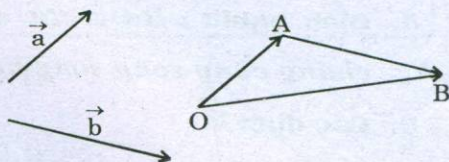
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong không gian và $l, k \in \mathbb{R}$.

1. Cộng vectơ

Lấy O tùy ý trong không gian.

Vẽ $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}$ thì $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$



Quy tắc ba điểm : Cho ba điểm bất kì M, N, K thì $\vec{MN} = \vec{MK} + \vec{KN}$

2. Trừ vectơ

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Quy tắc ba điểm : $\vec{MN} = \vec{KN} - \vec{KM}$

3. Tích vectơ

Tích vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ kí hiệu $k\vec{a}$:

+ Cùng hướng $\vec{a}$ nếu $k > 0$.

+ Ngược hướng $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

+ $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

Tính chất : $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

$$(l + k)\vec{a} = l\vec{a} + k\vec{a}$$

Hệ quả : Nếu I là trung điểm của AB , O tùy ý thì $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OI}$

4. Tích vô hướng của hai vectơ

• Định nghĩa : $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})})$

Hệ quả : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

• **Tính chất :** $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

$$\vec{a}(k\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$$

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

5. Định nghĩa : Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gọi là **đồng phẳng** nếu giá của chúng cùng song song hoặc nằm trên một mặt phẳng.

6. Các định lý

a) Cho $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \exists! m, n \in \mathbb{R} : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

b) Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì mọi vectơ đều được biểu diễn dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + k\vec{c}$ với m, n, k xác định duy nhất.

BT1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của $\triangle ABC$ và O là điểm bất kì trong không gian.

$$\text{Chứng minh : } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}.$$

Do M là trung điểm BC ta có :

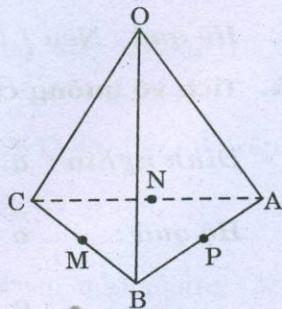
$$\begin{aligned} \vec{OB} + \vec{OC} &= (\vec{OM} + \vec{MB}) + (\vec{OM} + \vec{MC}) \\ &= 2\vec{OM} + (\vec{MB} + \vec{MC}) = 2\vec{OM} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự : } \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OP} \quad (2)$$

$$\vec{OA} + \vec{OC} = 2\vec{ON} \quad (3)$$

Lấy (1) + (2) + (3) ta được :

$$\begin{aligned} 2(\vec{OB} + \vec{OA} + \vec{OC}) &= 2(\vec{OM} + \vec{OP} + 2\vec{ON}) \\ \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= \vec{OM} + \vec{OP} + \vec{ON} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



BT2. Cho tứ diện ABCD và mặt phẳng (P). Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB và CD. Gọi I là trung điểm EF.

a) Chứng minh : $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$.

b) Trên mặt phẳng (P) tìm điểm M sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

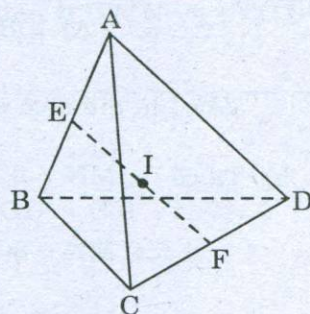
a) Do E là trung điểm AB nên $\vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{IE}$

Do F là trung điểm CD nên $\vec{IC} + \vec{ID} = 2\vec{IF}$

Vậy : $(\vec{IA} + \vec{IB}) + (\vec{IC} + \vec{ID}) = 2\vec{IE} + 2\vec{IF}$

$$= 2(\vec{IE} + \vec{IF})$$

$$= \vec{0} \quad (\text{do I trung điểm EF}).$$



b) Ta có : $(\vec{MA} + \vec{MB}) + (\vec{MC} + \vec{MD}) = 2\vec{ME} + 2\vec{MF}$

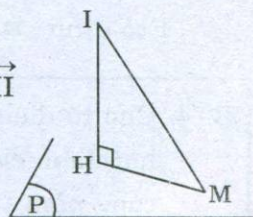
$$= 2(\vec{ME} + \vec{MF}) = 4\vec{MI}$$

Do đó : $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}| = |4\vec{MI}| = 4MI$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) ta có $IM \geq IH$.

Vậy $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}|$ ngắn nhất

$$\Leftrightarrow MI \text{ ngắn nhất} \Leftrightarrow M \equiv H \quad \blacksquare$$



BT3. Cho ba điểm A, B, C cố định trên mặt phẳng (α) và M di động trong không gian.

a) Xác định điểm I sao cho $3\vec{IA} - 2\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

b) Cho điểm N sao cho $\vec{MN} = 3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$.

Chứng minh đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định.

a) Ta có : $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} - 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE} \quad (\text{với E là trung điểm AC})$$

Vậy I là điểm cố định sao cho $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BE}$.

b) Ta có : $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MI} + (3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MI}$$

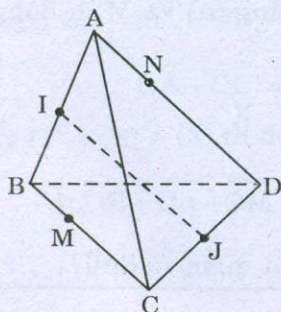
Do đó ba điểm M, N, I thẳng hàng nên đường thẳng MN luôn qua điểm I cố định ■

BT4. Cho tứ diện ABCD có I và J là trung điểm AB và CD. Gọi M và N là hai điểm chia đoạn BC và AD theo tỉ số k. Chứng minh I, J, M và N cùng nằm trên mặt phẳng.

Ta có : M chia đoạn BC theo tỉ số k $\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$

N chia đoạn AD theo tỉ số k $\Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$

Ta có : $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB})$



$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$$

$$= \frac{1}{2}(k\overrightarrow{ND} - \overrightarrow{ND} + k\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC})$$

$$= \frac{k-1}{2}(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$$

$$= \frac{k-1}{2}(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{MJ})$$

Do đó $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JN}, \overrightarrow{JM}$ đồng phẳng

$\Rightarrow J, I, M, N$ cùng thuộc một mặt phẳng ■

BT5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm CD và DD' . Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm tứ diện $A'D'MN$ và $BCC'D'$. Chứng minh GG' song song mp $(ABB'A')$.

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$$

$$\text{Ta có : } G \text{ trọng tâm tứ diện } A'D'MN \Leftrightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$$

$$\text{Do đó : } 4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G}) + (\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'G}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NG})$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} = \vec{c} + (\vec{b} + \vec{c}) + \left(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right) + \left(\vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}\right) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} = 3\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}$$

$$\text{Tương tự : } 4\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG'} = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG'} = 3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

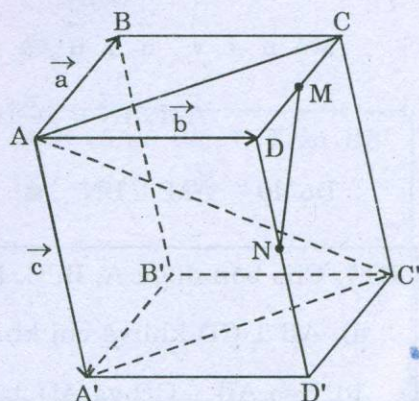
$$\text{Do đó : } 4(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AG'}) = -\frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{G'G} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$$

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{G'G}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}$ đồng phẳng.

Mặt khác $G \notin \text{mp}(ABB'A')$.

Do đó $GG' \parallel \text{mp}(ABB'A')$ ■



BT6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy hai điểm M và N lần lượt trên hai cạnh $B'C'$ và CD sao cho $B'M = CN$. Chứng minh AM vuông góc BN .

Gọi a là cạnh hình lập phương.

Gọi $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AA'}$

thì $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = a$

Đặt $x = B'M = CN$ ($0 \leq x \leq a$)

Ta có : $B'M = \frac{x}{a} \cdot B'C'$

và M nằm giữa hai điểm B' và C' nên

$$\overrightarrow{B'M} = \frac{x}{a} \overrightarrow{B'C'} = \frac{x}{a} \cdot \vec{v}$$

Tương tự : $\overrightarrow{CN} = \frac{x}{a} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{x}{a} \cdot \vec{u}$

Vậy : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'M} = \vec{w} + \vec{u} + \frac{x}{a} \vec{v}$

và $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{v} - \frac{x}{a} \cdot \vec{u}$

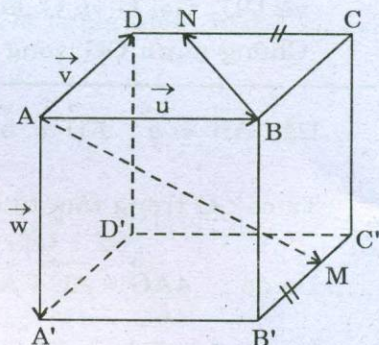
Do đó : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = (\vec{w} + \vec{u} + \frac{x}{a} \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \frac{x}{a} \vec{u})$

$$= \vec{w} \cdot \vec{v} - \frac{x}{a} \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{x}{a} \vec{u} \cdot \vec{u} + \frac{x}{a} \vec{v} \cdot \vec{v} - \frac{x^2}{a^2} \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Mà $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{u}$ và $\vec{w} \perp \vec{v}$ nên :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = -\frac{x}{a} |\vec{u}|^2 + \frac{x}{a} |\vec{v}|^2 = -xa + xa = 0$$

Do đó $AM \perp BN$ ■



BT7. Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý trong không gian. Chứng minh :

a) $AB \perp CD$ khi và chỉ khi $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

b) Nếu $AB \perp CD$ và $AD \perp BC$ thì $AC \perp BD$.

a) Ta có : $AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$

$$= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^2 + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2$$

$$= \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$$

$$= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})$$

$$= AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Do $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

nên $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= 0 \text{ (đây là hệ thức Euler)} \quad (*)$$

Do đó $AB \perp CD$ và $AD \perp BC$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Từ (*) $\Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

$$\Rightarrow AC \perp DB \quad \blacksquare$$

BT8. Cho $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh có độ dài 1. Trên BB' , CD , $A'D'$ lấy M , N , P sao cho $B'M = CN = D'P = a$ ($0 < a < 1$).

Chứng minh :

a) $\overrightarrow{MN} = -a \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (a-1) \overrightarrow{AA'}$

b) AC' vuông góc với MN và NP .

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{w}$

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

Ta có: $\frac{MB}{BB'} = \frac{1-a}{1}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = (1-a)\overrightarrow{B'B} = (a-1)\overrightarrow{AA'}$$

và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Ta có: $\frac{CN}{CD} = \frac{a}{1} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = a\overrightarrow{CD} = -a\overrightarrow{AB}$

Do đó: $\overrightarrow{MN} = (a-1)\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} - a\overrightarrow{AB}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Mà $\overrightarrow{MN} = (a-1)\vec{w} + \vec{v} - a\vec{u}$

Do đó: $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot [(a-1)\vec{w} + \vec{v} - a\vec{u}]$

$$\begin{aligned} &= (a-1)\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{v} - a|\vec{u}|^2 + (a-1)\vec{v} \cdot \vec{w} + \\ &\quad + |\vec{v}|^2 - a\vec{u} \cdot \vec{v} + (a-1)|\vec{w}|^2 + \vec{w} \cdot \vec{v} - a\vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= -a + 1 + (a-1) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

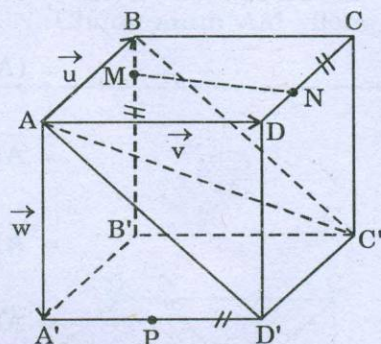
do $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$; $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$

Tương tự: $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'P} = (a-1)\vec{v} + \vec{w} - a\vec{u}$

nên $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{NP} = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot [(a-1)\vec{v} + \vec{w} - a\vec{u}]$

$$= -a + (a-1) + 1 = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2): $AC' \perp MN$ và $AC' \perp NP$ ■



BT9. Cho $\triangle ABC$ trong không gian.

a) Cho điểm M thỏa: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AM}$. Chứng minh BM vuông góc AC.

b) Gọi AD là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

a) Ta có : $\vec{AB} \cdot \vec{CM} = \vec{CB} \cdot \vec{AM}$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot (\vec{AM} - \vec{AC}) = \vec{CB} \cdot \vec{AM}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AM} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AM} \cdot \vec{CB} = 0$$

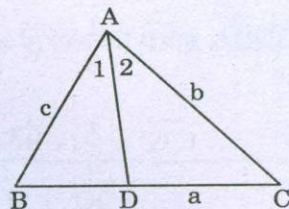
$$\Leftrightarrow \vec{AM} (\vec{AB} + \vec{BC}) - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AC} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{AC} (\vec{AM} - \vec{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow AC \perp BM.$$



b) Gọi $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$

Do tính chất chân đường phân giác trong nên :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow DB = \frac{c}{b} \cdot DC$$

Mà D nằm giữa B và C nên :

$$\vec{DB} = -\frac{c}{b} \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AD} = -\frac{c}{b} (\vec{AC} - \vec{AD})$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \frac{c}{b} \vec{AC} = \left(1 + \frac{c}{b}\right) \vec{AD} = \frac{b+c}{b} \vec{AD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AD} = \frac{b}{b+c} \vec{AB} + \frac{c}{b+c} \vec{AC} \quad \blacksquare$$

BT10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm $\triangle A'BD$ và $\triangle B'CD'$.

a) Chứng minh bốn điểm A, C', G và G' thẳng hàng.

Suy ra $AG = GG' = G'C'$.

b) Nếu hình hộp là hình lập phương, chứng minh AC' vuông góc mp $(A'BD)$.

a) Đặt $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$ và $\vec{AA'} = \vec{c}$.

Do G trọng tâm $\Delta A'BD$ nên

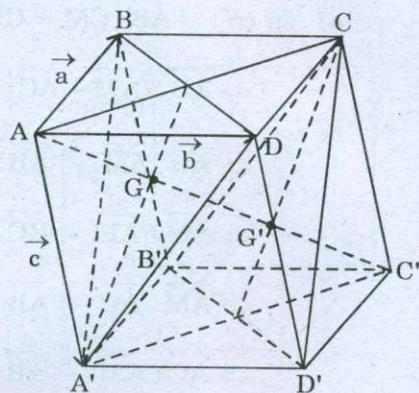
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \quad (1)$$

Do G' trọng tâm $\Delta B'CD'$ nên

$$\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} = 3\overrightarrow{C'G'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{C'G'} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) \quad (2)$$



Mặt khác : $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}) - \overrightarrow{AG}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})] - \overrightarrow{AG}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{GG'}$

Vậy bốn điểm A, G, C', G' thẳng hàng và $AG = G'C' = GG'$.

b) Ta có : $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$

và $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$

Do đó : $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} - \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c}$

$$= |\overrightarrow{a}|^2 - |\overrightarrow{c}|^2 = 0 \quad (\text{do tính chất hình lập phương})$$

Vậy $AC' \perp A'B$. Tương tự : $AC' \perp BD$.

Do đó : $AC' \perp mp(A'BD)$ ■

BT11. Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Gọi G và H lần lượt là trọng tâm và trực tâm của ΔABC .

- Tính OG và diện tích ΔABC theo a, b, c ?
- Chứng minh bình phương diện tích ΔABC bằng tổng bình phương các diện tích của ΔOBC , ΔOCA và ΔOAB .
- Gọi α, β, γ là góc nhị diện các cạnh BC, CA và AB của tứ diện ABCD. Chứng minh : $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
- Chứng minh OH vuông góc với BC và AB. Tính OH.

a) • Do G là trọng tâm ΔABC nên $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

$$\Rightarrow OG^2 = \frac{1}{9}(OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 2\vec{OA} \cdot \vec{OC} + 2\vec{OB} \cdot \vec{OC})$$

mà $OA \perp OB$, $OA \perp OC$, $OB \perp OC$

nên $OG^2 = \frac{1}{9}(OA^2 + OB^2 + OC^2) \Rightarrow OG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

• Ta có : $S = \text{diện tích } \Delta ABC = \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin \widehat{CAB}$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}AC^2 \cdot AB^2 \cdot \sin^2 \widehat{CAB}$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}AC^2 \cdot AB^2 (1 - \cos^2 \widehat{CAB})$$

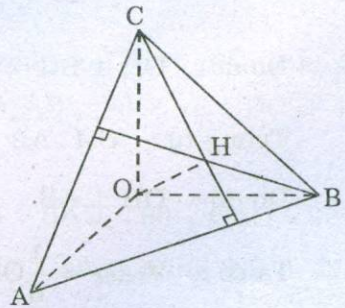
$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}AC^2 \cdot AB^2 \left[1 - \frac{(\vec{AC} \cdot \vec{AB})^2}{AC^2 \cdot AB^2} \right]$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4} \left[AC^2 \cdot AB^2 - (\vec{AC} \cdot \vec{AB})^2 \right]$$

Mà $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{OB} - \vec{OA})(\vec{OC} - \vec{OA})$

$$= \vec{OB} \cdot \vec{OC} - \vec{OB} \cdot \vec{OA} - \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{OA}^2 = a^2$$

Vậy $S^2 = \frac{1}{4}[(b^2 + a^2)(c^2 + a^2) - a^4] \Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + b^2a^2 + a^2c^2}$.



$$\text{b) Ta có : } S_1 = dt(\triangle OBC) = \frac{1}{2} OB \cdot OC = \frac{1}{2} bc$$

$$S_2 = dt(\triangle OAB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} ab$$

$$S_3 = dt(\triangle OAC) = \frac{1}{2} OA \cdot OC = \frac{1}{2} ac$$

$$\text{Do đó : } S^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2 + \frac{1}{4} a^2 c^2 \Rightarrow S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

$$\text{c) Ta có : } S_1 = dt(\triangle OBC) = S \cdot \cos \alpha$$

$$S_2 = dt(\triangle OAB) = S \cdot \cos \gamma$$

$$S_3 = dt(\triangle OAC) = S \cdot \cos \beta$$

$$\text{Mà theo câu b : } S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

$$\text{nên } S^2 = S^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

$$\text{d) Ta có : } \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} \text{ (do H trực tâm } \triangle ABC)$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\text{Do đó : } OH \perp BC$$

$$\text{Tương tự : } \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\text{Do đó : } OH \perp AB$$

$$\text{Ta có : } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} abc$$

$$\text{mà } V_{OABC} = \frac{1}{3} OH \cdot dt(\triangle ABC)$$

$$\text{Do đó : } OH = \frac{abc}{2S} = \frac{abc}{\sqrt{b^2 c^2 + b^2 a^2 + a^2 c^2}} \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.

2. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy M trên SA sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$, lấy N trên BC sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD . Gọi I là trung điểm của MN , P là điểm bất kì.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

b) Xác định E và F thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

c) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Chứng minh : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$,

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}).$$

4. Cho hai hình vuông $ABCD$, $ABC'D'$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau có tâm lần lượt là O , O' . Chứng minh $AB \perp OO'$ và $CDC'D'$ là hình chữ nhật.

5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD . Chứng minh $AB \perp CD$, $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có P , R lần lượt là trung điểm của AB , $A'D'$. Gọi P' , Q , Q' , R' lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD$, $CDD'C'$, $A'B'C'D'$, $ADD'A'$. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

b) Hai tam giác PQR và $P'Q'R'$ có cùng trọng tâm.

7. Cho tứ diện ABCD.

a) M là điểm di động trong không gian sao cho

$$3|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$$

Tìm quỹ tích điểm M.

b) N là điểm di động trong không gian sao cho

$$3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = |\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA}|$$

Tìm quỹ tích điểm N.

8. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có G là trọng tâm của tam giác AB'C.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG}$.

b) Gọi P, Q, R lần lượt là các điểm đối xứng của D' qua A, B', C. Chứng minh B là trọng tâm tứ diện PQRD'.

9. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Trên AC, BD lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD} = k$ ($k > 0$). Chứng minh

ba vectơ $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IN}$ đồng phẳng.

10. Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên BC, CD, BD sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DB}$.

a) Chứng minh hai tứ diện ABCD và AMCP có cùng trọng tâm.

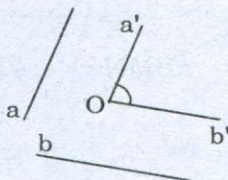
b) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của BN và CP, CP và DM, DM và CN. Chứng minh hai tứ diện ABCD và AIJK có cùng trọng tâm.

TÍNH GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Phương pháp

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b .

- Chọn điểm O nào đó trong không gian. Từ O dựng $a' \parallel a, b' \parallel b$.
- Góc nhọn (hoặc vuông) tạo bởi a', b' là góc tạo bởi a và b .
- Dùng định lý hàm cosin hoặc tỉ số lượng giác hoặc tích vô hướng của hai vectơ tính được góc của a', b' .



Lưu ý: Đây là một dạng toán hay ra trong đề thi tuyển sinh vào Đại học.

BT1. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc của AB và CD.

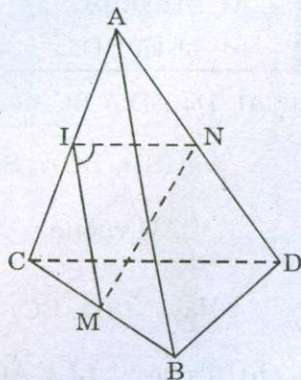
Gọi I là trung điểm AC.

Ta có: $IM \parallel AB$ và $IN \parallel CD$.

Vậy $\widehat{MIN} = (\widehat{AB, CD})$

Do định lý hàm cosin trong $\triangle MIN$, ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= IM^2 + IN^2 - 2IM \cdot IN \cdot \cos \widehat{MIN} \\ \Rightarrow 3a^2 &= a^2 + a^2 - 2(a) \cdot (a) \cdot \cos \widehat{MIN} \\ \Rightarrow \cos \widehat{MIN} &= \frac{3a^2 - 2a^2}{-2a^2} = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \widehat{MIN} &= 120^\circ \text{ (do } 0 \leq (\widehat{AB, CD}) \leq 90^\circ) \end{aligned}$$



BT2. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ABCD. Gọi M trung điểm CD.

a) Chứng minh AO vuông góc CD.

b) Tính cosin góc của AC và BM.

a) Từ O vẽ đường thẳng song song với CD cắt BC, BD tại E và F.

Hiển nhiên $BE = BF$ và $OE = OF$

Ta có: $\triangle ABE = \triangle ABF$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = AF$

Vậy $AO \perp EF$

Ta có : $(\widehat{AO, CD}) = \widehat{AOE} = 90^\circ$.

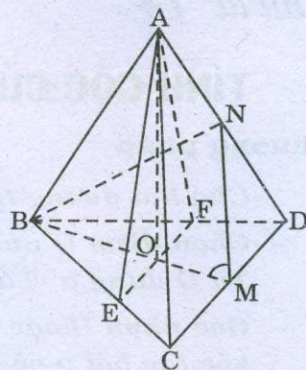
b) Gọi N trung điểm AD.

Ta có : $MN \parallel AC \Rightarrow \widehat{BMN} = (\widehat{AC, BM})$

Ta có : $BM = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$

$$\begin{aligned} \Delta BMN \Rightarrow \cos \widehat{BMN} &= \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM \cdot MN} \\ &= \frac{MN}{2BM} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Vậy $\cos (\widehat{AC, BM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ■



BT3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, SA vuông góc BC. Gọi I và J lần lượt là trung điểm SA và SC. Tính góc của các đường thẳng :

a) SD và BC

b) IJ và BD.

a) Do $AD \parallel BC$ nên $(\widehat{SA, BC}) = \widehat{SAD} = 90^\circ$

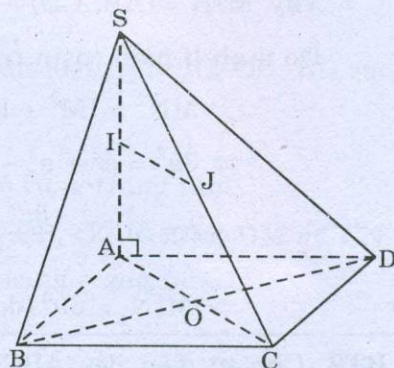
và $(\widehat{SD, BC}) = \widehat{SDA}$

$$\Delta SAD \text{ vuông} \Rightarrow \tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \sqrt{3}$$

Vậy $(\widehat{SD, BC}) = \frac{\pi}{3}$.

b) Ta có : $IJ \parallel AC$

Vậy $(\widehat{IJ, BD}) = \widehat{AOB} = 90^\circ$ ■



BT4. Cho tứ diện ABCD có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD. Biết $JK = \frac{5}{6}AB$. Tính góc của CD và các đường thẳng IJ, AB.

Đặt $AB = a$. Ta có :

$$IJ = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$$

d) Gọi N' là trung điểm của $B'C'$.

Ta có $ND \parallel N'D'$

Vậy $(\widehat{DN}, \widehat{A'P}) = (\widehat{N'D'}, \widehat{A'P})$

Ta có $\triangle N'C'D' = \triangle PD'A' \Rightarrow \widehat{D'_1} = \widehat{A'_1}$

Mà $\widehat{D'_1} + \widehat{D'_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A'_1} + \widehat{D'_2} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ID'A'$ vuông tại I

Vậy $(\widehat{ND}, \widehat{A'P}) = \widehat{N'IA'} = 90^\circ$ ■

BT6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^\circ$.

a) Tính góc của AB với $A'D$ và AC' với $B'D$.

b) Tính diện tích $A'B'CD$ và $ACC'A'$.

c) Tính góc của AC' và các đường thẳng AB, AD, AA' .

Đặt $\vec{AB} = \vec{x}$, $\vec{AD} = \vec{y}$, $\vec{AA'} = \vec{z}$ thì $\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{a^2}{2}$, $\vec{x} \cdot \vec{z} = -\frac{a^2}{2}$, $\vec{y} \cdot \vec{z} = -\frac{a^2}{2}$

a) • Do $AB \parallel A'B'$ nên $(\widehat{AB}, \widehat{A'D}) = (\widehat{A'B'}, \widehat{A'D}) = \widehat{DA'B'}$ hoặc $180^\circ - \widehat{DA'B'}$

Ta có $\vec{DB'} = \vec{AB'} - \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AA'} - \vec{AD} = \vec{x} + \vec{z} - \vec{y}$

$\Rightarrow DB'^2 = \vec{DB'}^2 = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2 + 2\vec{x}\vec{z} - 2\vec{x}\vec{y} - 2\vec{z}\vec{y} \Rightarrow DB'^2 = 2a^2$

$\triangle A'B'D \Rightarrow \vec{DB'}^2 = A'B'^2 + A'D^2 - 2A'B' \cdot A'D \cos \widehat{DA'B'}$

$\Rightarrow 2a^2 = a^2 + 3a^2 - 2a \cdot a \sqrt{3} \cdot \cos \widehat{DA'B'}$

$\Rightarrow \cos \widehat{DA'B'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy $(\widehat{AB}, \widehat{A'D}) = \varphi$ với $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

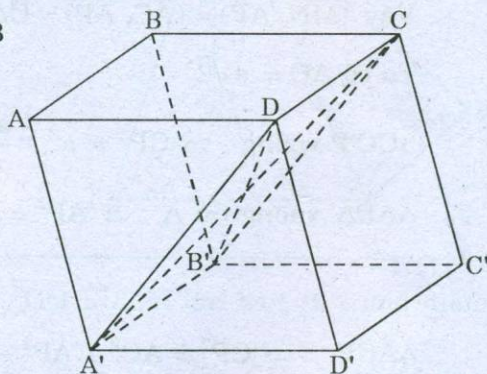
• $\vec{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

$\Rightarrow AC'^2 = \vec{AC'}^2 = 2a^2$

$\triangle AA'B' \Rightarrow AB'^2 = AA'^2 + AB'^2 - 2AA' \cdot AB' \cos 60^\circ = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = a^2$

Tứ giác $ADC'B'$ là hình bình hành mà $AD = AB' = a$ và $AC' = B'D = a\sqrt{2}$ nên $ADC'B'$ là hình vuông. Vậy $AC' \perp B'D$.

Vậy $(\widehat{AC'}, \widehat{B'D}) = 90^\circ$.



b) • Ta có $S_{A'B'CD} = A'D \cdot A'B' \sin \widehat{DA'B'} = a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}$.

• $\Delta ACC' \Rightarrow AC'^2 = AC^2 + CC'^2 - 2AC \cdot CC' \cdot \cos \widehat{ACC'}$
 $\Rightarrow \cos \widehat{ACC'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \widehat{ACC'} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy $S_{ACC'A'} = AC \cdot CC' \cdot \sin \widehat{ACC'} = a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}$.

c) • Ta có $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{x} = a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a^2$

Mà $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB} = AC' \cdot AB \cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}) = 45^\circ$.

• Ta có $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AD} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{y} = \frac{a^2}{2} + a^2 - \frac{a^2}{2} = a^2$

$\Rightarrow a^2 = AC' \cdot AD \cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}) = 45^\circ$.

• Ta có $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AA'} = (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) \cdot \vec{z} = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + a^2 = 0$

Vậy $(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AA'}) = 90^\circ$ ■

BT7*. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$.

a) Chứng minh đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Tính $\cos$ góc tạo bởi các cạnh đối của tứ diện.

a) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có $\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ADC}$

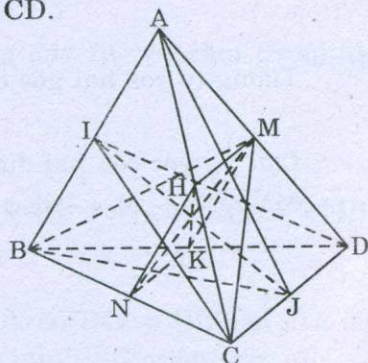
$\Rightarrow \Delta BCJ = \Delta ADJ$ (c.g.c)

$\Rightarrow JA = JB$

$\Rightarrow \Delta JAB$ cân

$\Rightarrow IJ \perp AB$

Lập luận tương tự : $JC = JD \Rightarrow IJ \perp CD$



Tương tự : Nếu M, N là trung điểm của AD, BC thì $MN \perp AD$ và BC.

Nếu H, K là trung điểm của AC, BD thì $HK \perp AC$ và BD.

b) Ta có $NH \parallel AB$ và $NK \parallel CD$

$$\triangle ACD \Rightarrow AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \widehat{ADC}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{ADC} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\triangle MDC \Rightarrow MC^2 = MD^2 + CD^2 - 2MD \cdot CD \cos \widehat{MDC}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c^2}{4} + a^2 - 2\left(\frac{c}{2}\right) \cdot (a) \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= \frac{c^2}{4} + a^2 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{aligned}$$

$$\triangle MNC \text{ vuông tại } N \Rightarrow NM^2 = MC^2 - NC^2$$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

$$\triangle NHM \Rightarrow MN^2 = HN^2 + HM^2 - 2HN \cdot HM \cos \widehat{NHM}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) \cos \widehat{NHM}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 - c^2}{2} = -\frac{a^2}{2} \cos \widehat{NHM} \Rightarrow \cos \widehat{NHM} = \frac{-b^2 + c^2}{a^2}$$

$$\text{Do } (\widehat{AB}, \widehat{CD}) \text{ nhọn} \Rightarrow \cos(\widehat{AB}, \widehat{CD}) = \frac{|c^2 - b^2|}{a^2}$$

$$\text{Tương tự } \cos \text{ hai góc còn lại là } \frac{|a^2 - c^2|}{b^2}, \frac{|a^2 - b^2|}{c^2} \quad \blacksquare$$

Lưu ý : góc của hai đường thẳng phải là góc nhọn (quy ước) nên $\cos \varphi > 0$.

Mà $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$ phải có giá trị tuyệt đối để $\cos(\widehat{AB}, \widehat{CD}) > 0$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.
Tính góc của SC và AB.
2. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$.
 - a) Chứng minh AB vuông góc CD.
 - b) Chứng minh nếu I, J lần lượt là trung điểm của AD, CD thì IJ vuông góc AB và CD.
3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính góc của AC và DA.
4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, $SA = AB$ và SA vuông góc BC.
 - a) Tính góc của SD và BC.
 - b) Gọi I, J lần lượt là các điểm trên SB, SD sao cho $IJ \parallel BD$. Chứng minh góc của AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J.
5. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Tính góc của hai đường thẳng :
 - a) SA và BC
 - b) SB và AC
 - c) SC và AB.
6. Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Tính góc của hai đường thẳng :
 - a) AB và EG
 - b) AF và EG
 - c) AB và DH.
7. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Hãy tính góc của AB và CD trong các trường hợp sau :
 - a) Tứ giác IJHK là hình thoi có $HI = \sqrt{3}IJ$.
 - b) Tứ giác IJHK là hình chữ nhật.
8. Cho hai tam giác cân ABC và DBC có chung đáy BC và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.
 - a) Chứng minh AD vuông góc CB.
 - b) Gọi M, N lần lượt là các điểm trên AB và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. Tính góc của MN và BC.
9. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên DC và BB' lần lượt lấy M, N sao cho $DM = CN = x$ ($0 \leq x \leq a$). Chứng minh AC' vuông góc MN.

Chủ đề 15

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẶNG

- **Định nghĩa :** Đường thẳng gọi là vuông góc mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.
- **Định lí :** Đường thẳng vuông góc mặt phẳng khi và chỉ khi nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trên mặt phẳng.
- **Định nghĩa :** Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng đó tại trung điểm của nó.
- **Định lí :** Mặt phẳng trung trực của đoạn AB là quỹ tích các điểm cách đều hai đầu đoạn AB .
- **Định nghĩa :** Trục đường tròn ngoại tiếp tam giác là đường thẳng vuông góc mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm đường tròn ngoại tiếp.
- **Định lí :** Trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là quỹ tích các điểm cách đều ba điểm A, B, C .
- **Định lí ba đường vuông góc**

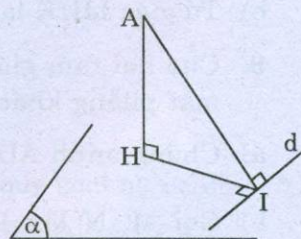
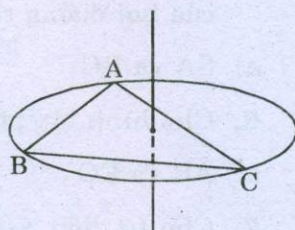
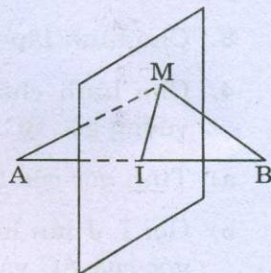
Nếu H là hình chiếu vuông góc của A lên (α) và $I \in (\alpha)$ với I khác H thì gọi AH là đường vuông góc và AI là đường xiên

HI là hình chiếu vuông góc của AI lên (α)

Lấy $d \subset (\alpha)$

d vuông góc HI khi và chỉ khi d vuông góc AI

- **Hệ quả :** Hai đoạn xiên (từ cùng một điểm) bằng nhau khi và chỉ khi hình chiếu vuông góc của chúng bằng nhau.



BT1. Lấy điểm I bất kì trong đường tròn (O; R). Vẽ dây CD qua I. Trên đường vuông góc mặt phẳng chứa (O; R) tại I lấy điểm S sao cho $SO = R$. Gọi E là điểm đối xứng của D qua O. Chứng minh :

- a) $\triangle SDE$ vuông. b) SD vuông góc CE . c) $\triangle SCD$ vuông.

a) Ta có : $SO = R = \frac{DE}{2}$ mà SO là đường trung tuyến của $\triangle SDE$.

Vậy $\triangle SDE$ vuông tại S.

b) Ta có : $\widehat{ECD} = 1v \Rightarrow EC \perp CD$

mà $EC \perp SI$ (do $SI \perp mp(ECD)$)

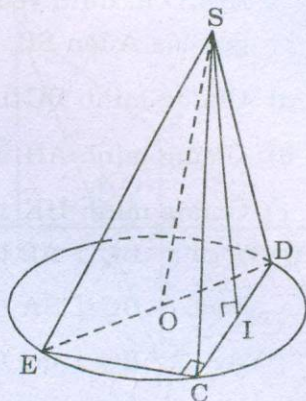
Vậy $EC \perp mp(SCD) \Rightarrow EC \perp SD$.

c) Ta có : $SD \perp SE$ ($\triangle SDE$ vuông tại S)

và $SD \perp EC$

Vậy $SD \perp mp(SEC) \Rightarrow SD \perp SC$

$\Rightarrow \triangle SCD$ vuông tại S ■



BT7. Đề dự bị ĐH khối B 2002

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc mặt phẳng (ABCD). $SA = a$, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi E là trung điểm CD. Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BE.

Vẽ $AH \perp BE$

Do định lí ba đường vuông góc :

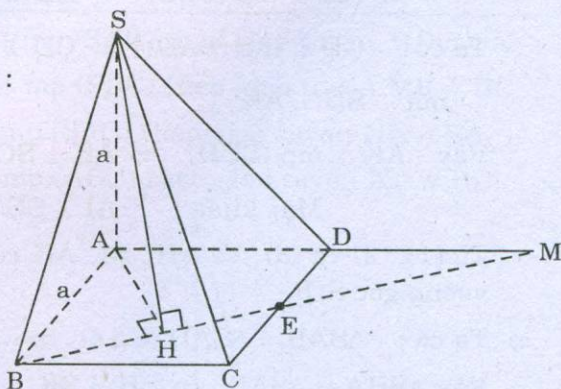
$SH \perp BE$

Trong mp (ABCD), BE cắt AD tại M.

ED là đường trung bình của $\triangle ABM$ nên D là trung điểm của AM và $AM = 2a$.

$\triangle ABM$ vuông

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AM}{BM} = \frac{a(2a)}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$



$$\Delta SAH \text{ vuông} \Rightarrow SH^2 = SA^2 + AH^2 = a^2 + \frac{4a^2}{5} = \frac{9a^2}{5}$$

$$\text{Vậy } SH = d(S, BE) = \frac{3a}{\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

BT3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD .

- Chứng minh $BC \perp mp(SAB), BD \perp mp(SAC)$.
- Chứng minh AH, AI và AK cùng thuộc một mặt phẳng.
- Chứng minh $HK \perp AI$.

a) Ta có : $BC \perp AB$ (do $ABCD$ hình vuông)

và $BC \perp SA$ (do $SA \perp mp(ABCD)$)

Vậy $BC \perp mp(SAB)$.

Ta có : $BD \perp AC$ (đường chéo hình vuông $ABCD$)

và $BD \perp SA$ (do $SA \perp mp(ABCD)$)

Vậy $BD \perp mp(SAC)$.

b) Ta có : $AH \perp BC$ (do $BC \perp mp(SAB)$)

và $AH \perp SB$

$\Rightarrow AH \perp mp(SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (1)

Ta có : $CD \perp mp(SAD) \Rightarrow CD \perp AK$

mà $SD \perp AK$

Vậy $AK \perp mp(SCD) \Rightarrow AK \perp SC$ (2)

Mặt khác : $AI \perp SC$ (3)

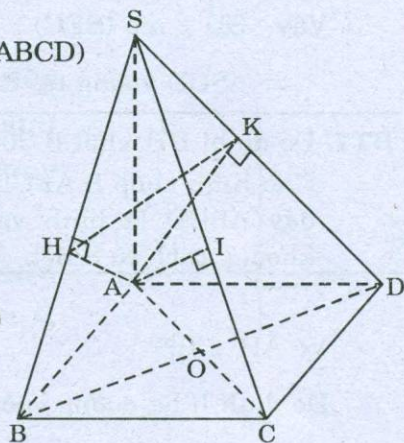
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow AH, AI, AK$ cùng nằm trên mặt phẳng qua A và vuông góc SC .

c) Ta có : $\Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c) $\Rightarrow SB = SD$ và $AH = AK$

Vậy $\Delta SHA = \Delta SAK \Rightarrow SH = SK$

Do đó : $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \parallel BD$

Mà $BD \perp mp(SAC) \Rightarrow HK \perp mp(SAC) \Rightarrow HK \perp AI$ $\blacksquare$



BT4. Dự bị Đại học khối D 2003

Cho hình chóp S.ABC có đáy $\triangle ABC$ vuông tại B, SA vuông góc với đáy, $SA = BC = 2a$, $AB = a$. Gọi M là trung điểm SC. Chứng minh $\triangle AMB$ cân và tính diện tích $\triangle AMB$ theo a.

Do định lí ba đường vuông góc $BC \perp BA$ và $SA \perp mp(ABC)$ nên $BC \perp SB$.

$$\triangle SBC \text{ vuông tại } B \Rightarrow MB = \frac{SC}{2}$$

$$\triangle SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow MA = \frac{SC}{2}$$

Vậy $MB = MA \Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M.

Gọi I là trung điểm AB thì $MI \perp AB$.

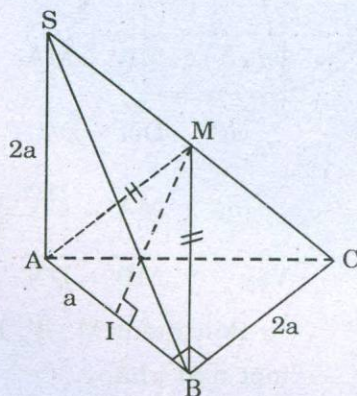
$$\triangle ABC \text{ vuông} \Rightarrow AC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

$$\triangle SAC \text{ vuông} \Rightarrow SC^2 = 4a^2 + 5a^2 = 9a^2$$

$$\text{Do đó: } MA = MB = \frac{SC}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$\triangle MIA \text{ vuông} \Rightarrow MI^2 = MA^2 - AI^2 = \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2$$

$$\text{Do đó: } dt(\triangle MAB) = \frac{1}{2}MI \cdot AB = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \quad \blacksquare$$



BT5. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mặt phẳng (ABC). Lấy điểm D trên đoạn AB. Mặt phẳng (α) qua D song song với SA và BC cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

Mặt phẳng $(\alpha) \parallel SA$, vậy (α) cắt mp (SAB) theo giao tuyến MD $\parallel SA$.

Mặt phẳng $(\alpha) \parallel BC$, vậy (α) cắt mp (SBC) theo giao tuyến MK $\parallel BC$.

Tương tự: $(\alpha) \parallel SA \Rightarrow (\alpha)$ cắt mp (SAC) theo giao tuyến NK $\parallel SA$.

$(\alpha) \parallel BC \Rightarrow (\alpha)$ cắt mp (ABC) theo giao tuyến ND $\parallel BC$.

Do đó $MK \parallel ND \parallel BC$

và $MD \parallel NK \parallel SA$

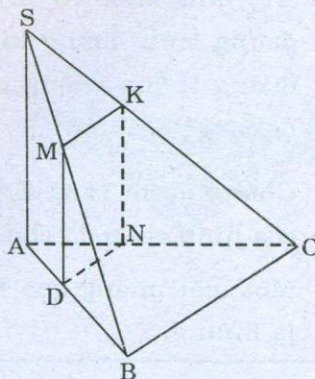
nên MDNK là hình bình hành.

Mặt khác $SA \perp mp(ABC)$

$$\Rightarrow SA \perp BC$$

Vậy $\widehat{MDN} = 1v$

Do đó MKND là hình chữ nhật $\blacksquare$



BT7. Tuyển sinh ĐH khối B 2003

Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AA' và CC' . Chứng minh bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Tính độ dài AA' theo a để tứ giác $B'MDN$ là hình vuông.

• Ta có : $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B'}$

và $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$

mà $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC}$

Vậy $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{DN} \Rightarrow MB' \parallel DN$

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, B', D, N cùng thuộc một mặt phẳng.

• Do $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{DN}$ nên $MB'ND$ là hình bình hành.

Mặt khác : Δ vuông $A'MB' = \Delta$ vuông MAD (c.g.c) $\Rightarrow MB' = MB$

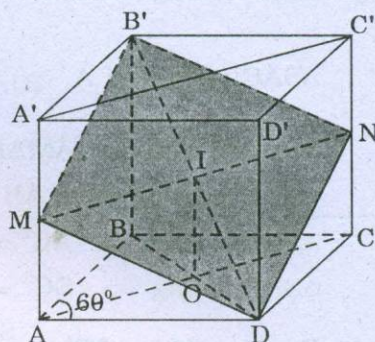
Vậy tứ giác $MB'ND$ là hình thoi.

ΔABD đều $\Rightarrow MN = AC = 2AO = 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = a\sqrt{3}$

$\Delta B'DD'$ vuông $\Rightarrow B'D^2 = BB'^2 + BD^2 = AA'^2 + a^2$

$B'MDN$ là hình vuông $\Leftrightarrow MN^2 = B'D^2 \Leftrightarrow 3a^2 = AA'^2 + a^2$

$\Leftrightarrow AA'^2 = 2a^2 \Leftrightarrow AA' = a\sqrt{2}$ ■



BT7. Một hình chóp có đáy $ABCD$ là nửa hình lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$. Đỉnh S của hình chóp nằm trên đường thẳng vuông góc với đáy tại trung điểm O của đoạn AD với $OS = a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh rằng $SA = SB = SC = SD$. Tính diện tích xung quanh của hình chóp đã cho.

b) Một mặt phẳng qua BC , cắt SA tại M , cắt SD tại N . Tứ giác $MNCB$ là hình gì ?

a) ABCD là nửa lục giác đều và O là trung điểm AD

nên $OA = OB = OC = OD = a$

Vậy $SA = SB = SC = SD = 2a$.

$$\text{Vậy : } S_{xq} = S_{\Delta SAD} + 3S_{\Delta SAB} = \frac{a^2 \sqrt{3}(4 + 3\sqrt{5})}{4}$$

b) Ta có : $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel mp(SAD)$

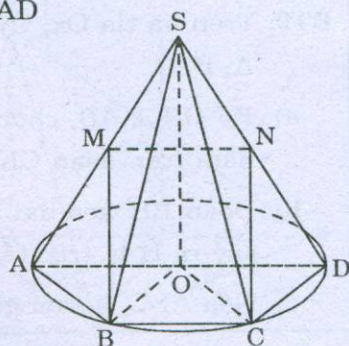
Do đó mp (α) chứa BC cắt mp (SAD) theo giao tuyến $MN \parallel BC \parallel AD$.

$$\text{Ta có : } \frac{MA}{SA} = \frac{ND}{SD} \text{ mà } SA = SD \Rightarrow MA = ND$$

$$\text{Ta có : } \Delta SAB = \Delta SCD \Rightarrow \widehat{SAB} = \widehat{SCD}$$

$$\text{Do đó } \Delta AMB = \Delta NCD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MB = NC$$

Vậy MNCB là hình thang cân ■



BT8. Cho ΔMAB vuông tại M nằm trong mp (α) . Trên đường vuông góc mp (α) tại A lấy hai điểm C, D nằm về hai phía đối với mp (α) . Gọi E là hình chiếu vuông góc của C trên MD, gọi H là giao điểm AM và CE. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AB. Chứng minh :

a) $CE \perp mp(MBD)$.

b) K là trực tâm ΔBCD .

a) Ta có : $MB \perp MA$ (do ΔMAB vuông)

và $MB \perp CD$ (do $CD \perp mp(\alpha)$)

$$\Rightarrow MB \perp mp(CDM) \Rightarrow MB \perp CE$$

Mặt khác $CE \perp MD$

Vậy $CE \perp mp(MBD)$.

b) Ta có : $HK \perp AB$ (gt)

$HK \perp CD$ (do $CD \perp mp(\alpha)$)

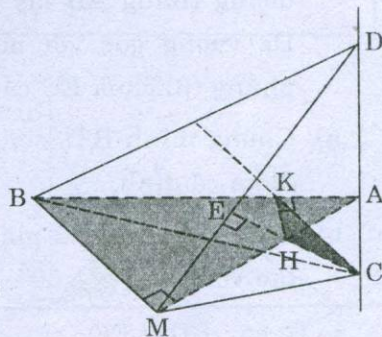
$$\Rightarrow HK \perp mp(ABD) \Rightarrow HK \perp BD$$

Mặt khác : $BD \perp CE$ (do $CE \perp mp(MBD)$)

Vậy $BD \perp mp(CEK) \Rightarrow BD \perp CK$

Mà $BK \perp CD$

Vậy K là trực tâm ΔBCD ■



BT9. Trên ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một, lấy ba điểm A, B, C .

- Kẻ $OK \perp AB$, chứng tỏ hình chiếu H vuông góc của O trên mp (ABC) nằm trên đoạn CK .
- Đoạn BH kéo dài cắt AC tại I . Chứng minh rằng $AC \perp mp(OBI)$ và suy ra H là trực tâm của ΔABC .
- Nếu ABC là tam giác đều, chứng minh OA, OB, OC bằng nhau.

a) Ta có $OC \perp mp(OAB)$ và $AB \perp CK$

nên $AB \perp CK$ (định lí ba đường vuông góc)

Vẽ $OH \perp CK$, ta có $AB \perp mp(OCK)$

nên $AB \perp OH$.

Vậy $OH \perp mp(ABC)$.

b) Ta có : $OB \perp mp(AOC) \Rightarrow OB \perp AC$

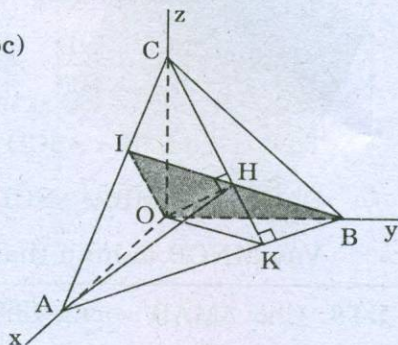
$OH \perp mp(ABC) \Rightarrow OH \perp AC$

Do đó $AC \perp mp(OBI)$

Vậy $AC \perp BI$ nên H là trực tâm ΔABC .

c) ΔABC đều $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn $(ABC) \Rightarrow HA = HB = HC$.

Mà $OH \perp mp(ABC)$ và HA, HB, HC là hình chiếu của ba đường xiên OA, OB, OC . Do đó $OA = OB = OC$ ■



BT10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong mặt phẳng (α) . Trên đường thẳng AB lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Dựng ba tia Ax, By, Dz vuông góc với mp (α) và nằm cùng phía đối với mp (α) . Mặt phẳng (β) chứa EC cắt Ax, By, Dz lần lượt tại A', B', D' .

- Chứng minh $B'D'$ song song BD và đường thẳng $A'D'$ luôn đi qua một điểm cố định.
- Tính diện tích tứ giác $A'B'CD'$ khi mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) tạo với nhau góc 60° .

a) • Ta có : $BD \parallel EC$

Mp (β) chứa EC , mp (By, Dz) chứa BD , vậy hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến $B'D' \parallel BD$.

- Trong mp (α) gọi F là giao điểm của AD và EC thì F cố định.

Ta có :

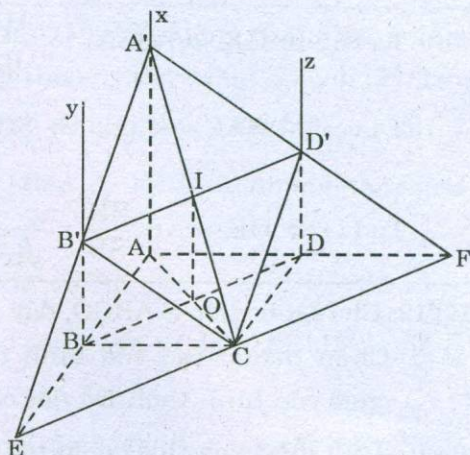
$$F \in AD \Rightarrow F \in mp(Ax, Dz)$$

$$F \in EC \Rightarrow F \in mp(\beta)$$

$$\text{Vậy } F \in A'D' = mp(\beta) \cap (Ax, Dz).$$

Do đó A'D' luôn qua điểm cố định F.

- b) Ta có : E, B', A' thẳng hàng vì cùng nằm trên giao tuyến của mp (β) và mp (By, Ax).



$$\text{Ta có : } C \text{ và } D' \text{ là trung điểm } EF \text{ và } A'F \Rightarrow CD' \parallel A'E \quad (1)$$

$$C \text{ và } B' \text{ là trung điểm } EF \text{ và } A'E \Rightarrow CB' \parallel A'F \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác : } BD \perp AC \text{ và } AA' \text{ nên } BD \perp mp(AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C$$

$$\text{Mà } B'D' \parallel BD \Rightarrow B'D' \perp A'C \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow A'B'CD'$ là hình thoi.

$$\text{Do góc của } (\alpha) \text{ và } (\beta) \text{ là } 60^\circ \text{ nên } Dt(ABCD) = dt(A'B'CD') \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow Dt(A'B'CD') = 2a^2 \quad \blacksquare$$

BT11. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = a$, $AC = b$. Trên đường thẳng vuông góc mp (ABC) tại C lấy điểm S di động. Mặt phẳng (α) qua C và vuông góc SB cắt SA, SB tại H và K.

- a) Chứng minh CH vuông góc mp (SAB) và H di động trên một đường cố định.

- b) Đặt $SC = x$. Tính HK theo a, b, x.

- a) Ta có : $BA \perp AC$ và SC

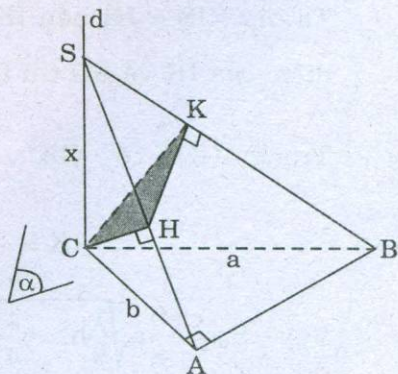
$$\text{nên } BA \perp mp(SAC).$$

$$\text{Do đó : } BA \perp CH$$

$$\text{Mặt khác } SB \perp mp(\alpha) \text{ nên } SB \perp CH.$$

$$\text{Vậy } CH \perp mp(SAB) \Rightarrow CH \perp AC$$

Ta có : $\widehat{CHA} = 1v$ và H nằm trên mặt phẳng cố định (A, d) nên H di động trên đường tròn đường kính AC.



b) Ta có : $\Delta SHK \sim \Delta SBA \Rightarrow \frac{HK}{BA} = \frac{SH}{SB}$ (1)

Ta có : ΔSAC vuông $\Rightarrow SC^2 = SH.SA \Rightarrow SH = \frac{SC^2}{SA} = \frac{x^2}{\sqrt{b^2 + x^2}}$

Từ (1) $\Rightarrow HK = AB \cdot \frac{SH}{SB} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot x^2}{\sqrt{b^2 + x^2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2}}$ ■

BT12. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = \alpha$.

Chân đường cao của hình chóp trùng với giao điểm của hai đường chéo của hình thoi. Độ dài của đường cao hình chóp là h.

Tính diện tích thiết diện tạo thành khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng đi qua cạnh AB và các trung điểm M, N của các cạnh SC, SD tương ứng.

Vì M, N là trung điểm của SC, SD nên $MN \parallel DC \parallel AB \Rightarrow ABMN$ là hình thang.

Kẻ $SK \perp AB$, nối KO kéo dài cắt CD tại H.

Nối SH cắt MN tại I.

Ta có $AB \perp SK$ và $AB \perp SO$

$$\Rightarrow AB \perp mp(SKO) \Rightarrow AB \perp KI.$$

Diện tích thiết diện :

$$S_{td} = \frac{MN + AB}{2} \cdot IK$$

trong đó $AB = a$; $MN = \frac{a}{2}$

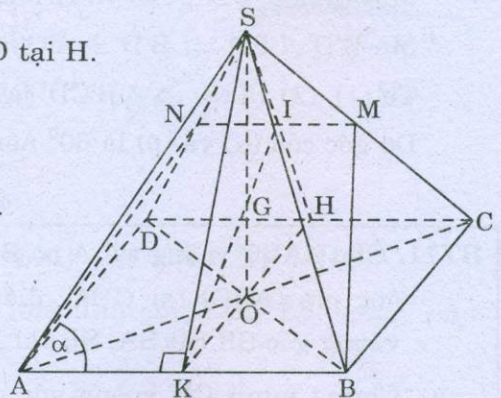
Ta có : $OK = OH = OA \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} a \sin \alpha$

Ta có : $IS = IH$ nên IK và SO là trung tuyến của ΔSKH . Gọi G là giao điểm của IK và SO thì $GO = \frac{h}{3}$.

Trong ΔGOK có $GK^2 = GO^2 + OK^2 = \frac{1}{9} h^2 + \frac{1}{4} a^2 \sin^2 \alpha$

$$\Rightarrow IK = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{9} h^2 + \frac{1}{4} a^2 \sin^2 \alpha}$$

Vậy $S_{td} = \frac{9}{8} a \sqrt{\frac{1}{9} h^2 + \frac{1}{4} a^2 \sin^2 \alpha}$ ■



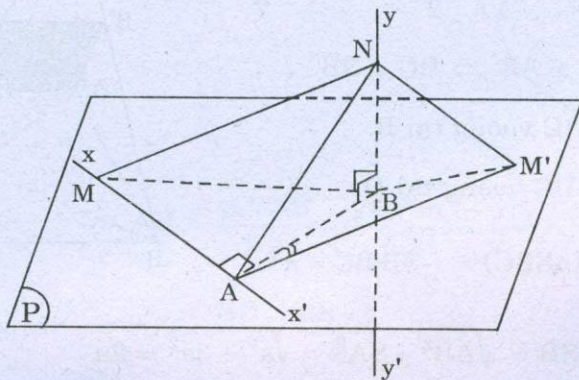
BT13. Cho đoạn thẳng $AB = a$ nằm trên mp (P). Vẽ đường thẳng $x'Ax$ nằm trong (P) và vuông góc với AB. Đường thẳng $y'By$ vuông góc với (P). Lấy điểm M di động trên $x'x$, một điểm N di động trên $y'y$ với $MN = a\sqrt{2}$.

- Chứng minh rằng bốn mặt của tứ diện A.BMN là những tam giác vuông.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa hai đoạn AM và BN.
- Chứng tỏ rằng tổng bình phương các cạnh của tứ diện ABMN là hằng số.
- Dựng hình bình hành AMNM', chứng tỏ rằng $AB \perp mp(M'NB)$, từ đó suy ra góc giữa đường thẳng MN và đường thẳng AB không đổi khi M, N di chuyển lần lượt trên $x'x$ và $y'y$.

a) Ta có : $yy' \perp mp(P)$ và $xx' \perp AB$

$\Rightarrow NA \perp xx'$ (định lí ba đường vuông góc)

Ta có : $\triangle NAM$, $\triangle MAB$ vuông góc tại A; $\triangle NMB$ và $\triangle NAB$ vuông tại B.



b) $\triangle AMB$ vuông : $AM^2 = MB^2 - AB^2$

$\triangle BMN$ vuông : $BN^2 = MN^2 - BM^2$

Suy ra $AM^2 + BN^2 = MN^2 - AB^2 = a^2$.

c) Ta có : $(AN^2 + AM^2) + (NB^2 + MB^2) + MN^2 + AB^2$
 $= MN^2 + MN^2 + MN^2 + AB^2 = 7a^2$.

Ta có : $B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' = BC \cdot \frac{SB'}{SB} = \frac{x}{2}$

Do đó : $dt(B'C'DA) = \frac{1}{4}(x+2a)\sqrt{x^2+3a^2}-3ax$ ■

BT15. Trong mp (α) cho nửa đường tròn (C) đường kính AD = 2R. Lấy B $\in$ (C); trên nửa đường thẳng Ax vuông góc mp (α) lấy điểm S sao cho SA = AD. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD.

- Chứng minh tam giác SBD và AHK vuông.
- Tính HK theo AD và BD.
- Tìm B trên (C) sao cho tổng diện tích ΔSAB và ΔDAB đạt giá trị lớn nhất.

a) Ta có : $\widehat{ABD} = 1v \Rightarrow BD \perp AB$

mà $SA \perp mp(\alpha) \Rightarrow BD \perp SA$

Vậy $BD \perp mp(SAB) \Rightarrow BD \perp SB$

Ta có : $BD \perp mp(SAB) \Rightarrow BD \perp AH$

mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp mp(SBD)$

$\Rightarrow AH \perp HK.$

b) Đặt $BD = x$.

Ta có : $AB^2 = 4R^2 - x^2$

ΔSAB vuông $\Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{2R\sqrt{4R^2 - x^2}}{\sqrt{8R^2 - x^2}}$

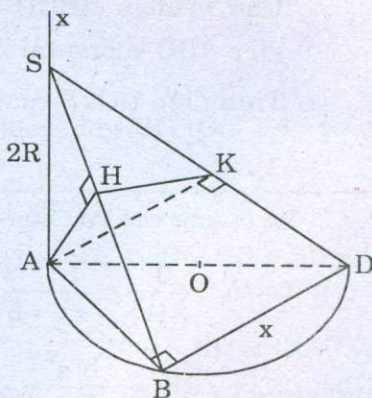
ΔSAD vuông cân $\Rightarrow AK = \frac{SD}{2} = \frac{2R\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$

ΔAHK vuông tại H $\Rightarrow HK^2 = AK^2 - AH^2$

$\Rightarrow HK^2 = 2R^2 - \frac{4R^2(4R^2 - x^2)}{8R^2 - x^2} = \frac{2R^2x^2}{8R^2 - x^2}$

c) Ta có : $M = dt(\Delta SAB) + dt(\Delta DAB) = \frac{1}{2}SA \cdot AB + \frac{1}{2}BA \cdot BD$

$= R\sqrt{4R^2 - x^2} + \frac{x}{2}\sqrt{4R^2 - x^2} = \frac{1}{2}(x+2R)\sqrt{4R^2 - x^2}$



$$\text{Ta có : } M^2 = \frac{1}{4}(x+2R)^2 \cdot (4R^2 - x^2) = \frac{1}{4}(x+2R)^3(2R-x)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương ta có :

$$4R = (2R-x) + \frac{1}{3}(2R+x) + \frac{1}{3}(2R+x) + \frac{1}{3}(2R+x) \geq 4\sqrt[4]{(2R-x)\frac{(2R+x)^3}{27}}$$

$$\Leftrightarrow R^4 \geq \frac{(2R-x)(2R+x)^3}{27} \Leftrightarrow \frac{27}{4}R^4 \geq M^2 \Leftrightarrow M \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 2R-x = \frac{1}{3}(2R+x) \Leftrightarrow x=R$$

Do đó tổng diện tích ΔSAB và ΔDAB max $\Leftrightarrow DB = R$ ■

BT16*. Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối D 2003

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại A, $AD = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Tính diện tích S của tam giác BCD theo a, b, c và chứng minh rằng :

$$2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Vẽ đường cao AH của ΔABC .

$$\text{Ta có : } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow AH = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

ΔADH vuông tại A :

$$DH^2 = AD^2 + AH^2$$

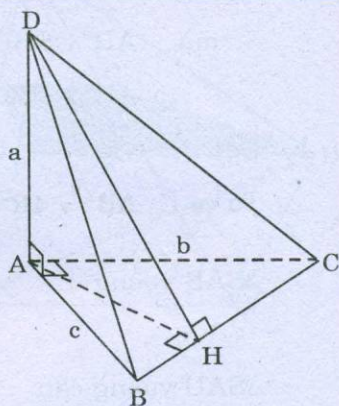
$$= a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow DH = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{b^2 + c^2}}$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại A} \Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\text{Ta có : } BC \perp (DAH) \Rightarrow BC \perp DH$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2}BC \cdot DH = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$



$$= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{abc(a+b+c)} &= \sqrt{a^2 bc + b^2 ac + c^2 ab} \\ &\leq \sqrt{a^2 \frac{b^2 + c^2}{2} + b^2 \frac{a^2 + c^2}{2} + c^2 \frac{a^2 + b^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 b^2}{2} + \frac{a^2 c^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{2} + \frac{b^2 c^2}{2} + \frac{c^2 a^2}{2} + \frac{c^2 b^2}{2}} \\ &= \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} = 2S \end{aligned}$$

Vậy $2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$ ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

- Cho tứ diện ABCD có $\triangle ABC$ và $\triangle BCD$ cân chung đáy BC. Gọi I là trung điểm của BC. Vẽ AH vuông góc DI. Chứng minh :
 - $BC \perp (ADI)$
 - $AH \perp (BCD)$.
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC với BD. Chứng minh :
 - $SO \perp (ABCD)$
 - $AC \perp (SBD)$
 - $BD \perp (SAC)$.
- Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC). Chứng minh :
 - $\triangle ABC$ có ba góc nhọn.
 - H là trực tâm của $\triangle ABC$.
 - $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O và $SA = SC, SB = SD$.
 - Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.
 - Vẽ SH là đường cao $\triangle SAB$. Chứng minh $AB \perp (SOH)$.
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, SA vuông góc (ABCD). Lấy I, K lần lượt trên SB, SD thỏa mãn $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh $BD \perp SC$ và $IK \perp (SAC)$.

- 130
- 
- Trần Minh Quang

13. Cho tứ diện ABCD có DA vuông góc mp (ABC) và $AB = AC = a$, $BC = \frac{6}{5}a$.

Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ AH vuông góc MD ($H \in MD$).

a) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

b) Cho $AD = \frac{4}{5}a$. Tính góc của AC và MD.

c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle DBC$. Chứng minh G_1G_2 vuông góc mặt phẳng (ABC).

14. Cho $\triangle ABC$ vuông tại B. Trên đường vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S khác A. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Chứng minh :

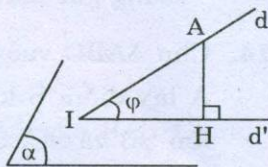
a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (AB_1C_1) là đường thẳng cố định và là tiếp tuyến của đường tròn qua A, B, C.

b) B_1C_1 qua điểm cố định I và $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$.

Chủ đề 16

TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

- **Định nghĩa :** Góc của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là góc nhọn tạo bởi d và hình chiếu vuông góc của d lên (α) .
- **Phương pháp tính góc của d và (α)**
 - Tìm giao điểm I của d và mp (α) .
 - Chọn A trên d , vẽ $AH \perp mp$ (α) thì góc của d và mp (α) là $\widehat{AIH}$.
 - Dùng tỉ số lượng giác hoặc hệ thức lượng trong tam giác tính được góc này.



BT1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình vuông cạnh a ; SA vuông góc mp $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính sin góc của :

a) SC và mp (SAB) .

b) AC và mp (SBC) .

a) Ta có : $CB \perp AB$ và SA nên $CB \perp mp$ (SAB) .

Vậy : $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{CSB}$.

$$\Delta SBC \text{ vuông tại } B \Rightarrow \sin \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

b) Vẽ $AH \perp SB$

mà $BC \perp mp$ $(SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp mp$ (SBC) .

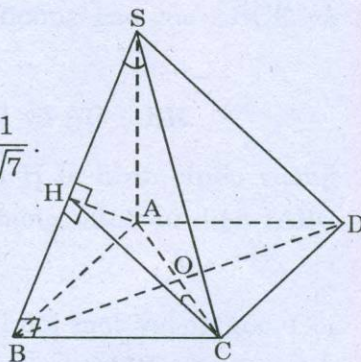
Hình chiếu của AC lên mp (SBC) là HC nên

$$(AC, (SBC)) = (AC, HC) = \widehat{ACH}$$

$$\Delta SAB \text{ vuông} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{6} \times a}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

$AH \perp mp$ $(SBC) \Rightarrow AH \perp HC$

$$\Delta AHC \text{ vuông tại } H \Rightarrow \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \blacksquare$$



BT2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy $\triangle ABC$ cân đỉnh A , $\widehat{ABC} = \alpha$, BC' tạo với đáy (ABC) góc β . Gọi I là trung điểm AA' , biết $\widehat{BIC} = 90^\circ$.

Chứng minh :

a) $\triangle BCI$ vuông cân.

b) $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta = 1$.

Ta có : $\widehat{BC'B'} = \beta$

a) $\triangle$ vuông $AIC = \triangle$ vuông AIB vì có

$\widehat{IAC} = \widehat{IAB} = 1v$, $AC = AB$, AI chung.

Vậy $IB = IC$. Do đó $\triangle BCI$ vuông cân.

b) Đặt $AB = AC = a$, $BC = b$, $AA' = h$.

$\triangle BB'C'$ vuông $\Rightarrow \tan \beta = \frac{BB'}{B'C'} = \frac{h}{b}$

Gọi H trung điểm BC ,

$\triangle$ vuông $ABH \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AH}{HB} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{\frac{b}{2}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{b}$

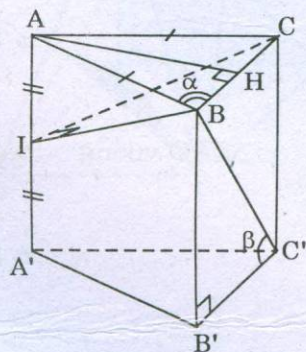
Ta có : $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta = \frac{4a^2 + h^2 - b^2}{b^2}$

Mà $\triangle AIC$ vuông $\Rightarrow IC^2 = a^2 + \frac{h^2}{4} = \frac{4a^2 + h^2}{4}$ (1)

$\triangle IBC$ vuông cân $\Rightarrow b^2 = 2IC^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{4a^2 + h^2}{4} = \frac{b^2}{2}$

Do đó : $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta = \frac{2b^2 - b^2}{b^2} = 1$ ■



BT3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có a là độ dài cạnh đáy và $\widehat{ASB} = \alpha$.

a) Gọi φ là góc giữa cạnh bên với đáy, tính $\sin \varphi$ theo α .

b) Cho $SA = a$, I là trung điểm của đường cao SO của hình chóp. Chứng minh rằng các đoạn thẳng IA , IB , IC đôi một vuông góc nhau.

a) Gọi H là trung điểm BC, O là chân đường cao hình chóp hạ từ S.

$$\text{Ta có: } AO = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

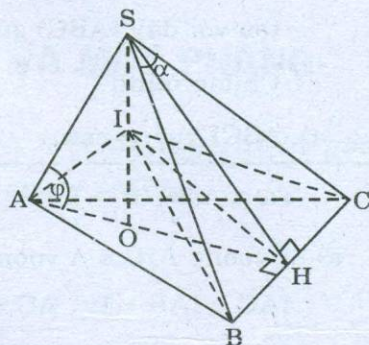
$$\triangle SHB \text{ vuông} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{SB}$$

$$\Rightarrow SA = SB = SC = \frac{a}{2\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\triangle SAO \text{ vuông} \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2$$

$$\Rightarrow SO^2 = \frac{a^2}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{36} \left(\frac{9}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 12 \right)$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a}{6\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{9 - 12\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$



Vì SO là đường cao của hình chóp nên φ chính là góc giữa cạnh SA và đáy.

$$\text{Ta có: } \sin \varphi = \sin \widehat{SAO} = \frac{SO}{SA} = \frac{1}{3} \sqrt{9 - 12\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{b) Nếu } SA = a \text{ thì } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\text{Vậy: } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{9}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow IO = \frac{SO}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{và } IH = \sqrt{IO^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2} = HB = HC$$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 90^\circ. \text{ Vậy } IB \perp IC.$$

Chứng minh tương tự ta có $IA \perp IB, IA \perp IC$ ■

BT4. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD hình vuông cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc mp (ABCD). Gọi (α) là mặt phẳng qua BC và tạo với AC góc 30° , (α) cắt SA, SD tại M, N. Tính diện tích (BCNM).

Vẽ $AH \perp BM$

Ta có $BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp mp(BCM)$

Do đó hình chiếu của AC lên mp (α) là HC.

Vậy $\widehat{ACH} = 30^\circ$.

ΔAHC vuông tại H nên

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Delta AMB \text{ vuông tại A} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AM = a$$

Mp (α) chứa BC // mp (SAD).

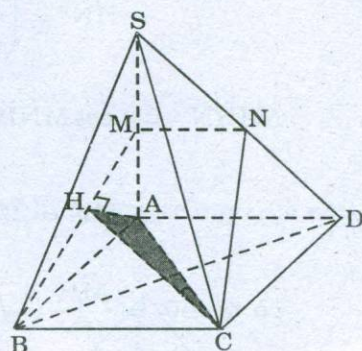
Vậy (α) cắt mp (SAD) theo giao tuyến MN // BC // AD.

Do $BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp BM$

Do đó mặt cắt là hình thang vuông BCBM.

ΔABM vuông cân $\Rightarrow MB = a\sqrt{2}$

$$\text{Vậy dt (MNCB)} = \frac{MB}{2}(MN + BC) = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a}{2} + a\right) = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4} \blacksquare$$



BT5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O và SO vuông góc mp (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc của MN và (ABCD) là 60° .

a) Tính MN và SO.

b) Tính góc giữa MN và mp (SBD).

Gọi H là trung điểm của AO.

Ta có $MH \parallel SO$ mà $SO \perp (ABCD)$ nên $MH \perp (ABCD)$.

Do đó HN là hình chiếu vuông góc của MN lên (ABCD).

Do đó $\widehat{MNH} = (\widehat{MN, (ABCD)}) = 60^\circ$.

Vẽ $SH \perp (ABC)$ thì SA, SB, SC lần lượt có hình chiếu vuông góc lên (ABC) là HA, HB, HC vậy $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = \alpha$.

Do đó:

$$\Delta \perp SHA = \Delta \perp SHB = \Delta \perp SHC$$

$$\Rightarrow HA = HB = HC$$

Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Do ΔABC cân tại A . Gọi I là trung điểm BC thì AI là đường trung trực của BC nên

$$H \in AI \text{ và } \widehat{BAI} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Delta ABI \perp \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BI}{AB}$$

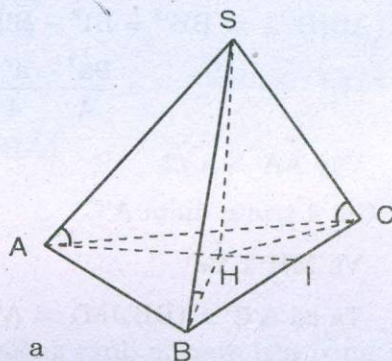
$$\Rightarrow BC = 2BI = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$$

Do định lí hàm sin trên ΔABC nên

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = HC = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Delta SHC \perp \Rightarrow \tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$



BT7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , AA' vuông góc mp $(ABCD)$, BC' tạo với mp $(ABB'A')$ góc 30° . Gọi M là trung điểm của AC .

- Tính AA' và khoảng cách từ M đến mp $(BA'C')$.
- Gọi N là trung điểm của BB' . Tính góc của MN và mp $(BA'C')$.

a) Gọi I trung điểm $A'B'$

$$\Delta A'B'C' \text{ đều} \Rightarrow C'I \perp A'B'$$

$$\text{Mà } AA' \perp (A'B'C')$$

$$\Rightarrow AA' \perp (AA'B'B)$$

$$\text{Vậy } C'I \perp (AA'B'B)$$

Do đó BI là hình chiếu $\perp$ của BC' lên (AA'B'B)

Vậy góc của BC' và (AA'B'B) là góc của BC' và BI

Vậy $\widehat{C'BI} = 30^\circ$

$$\Delta BIC' \perp \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{C'I}{BI} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BI = \sqrt{3} C'I = \sqrt{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$\begin{aligned} \Delta BIB' \perp \Rightarrow BB'^2 &= BI^2 - B'I^2 \\ &= \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2 \end{aligned}$$

Vậy $AA' = a\sqrt{2}$

* Gọi J trung điểm A'C'

Vẽ $MH \perp BJ$

Ta có $A'C' \perp (BB'JM) \Rightarrow A'C' \perp MH$

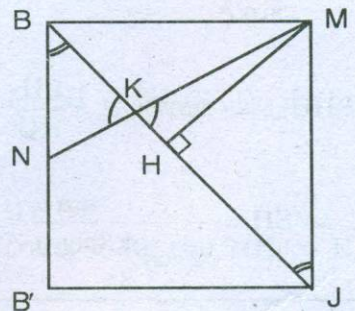
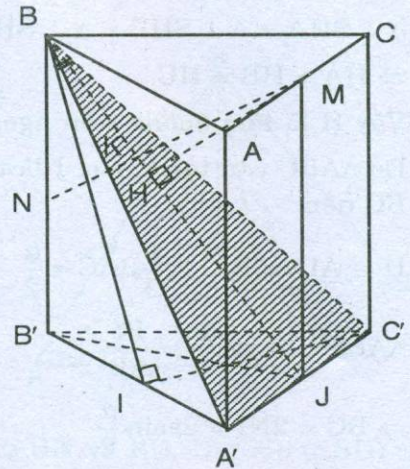
Vậy $MH \perp (BA'C')$

Và $MH = d(M, BA'C')$

$\Delta BHJ \perp$ tại M.

$$\Rightarrow MH = \frac{BM.MJ}{BJ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + 2a^2}}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{11}}$$



b) Gọi K là giao điểm MN và BJ. Do $MH \perp (BA'C')$ nên HK là hình chiếu vuông góc của MN lên $(BA'C')$

Vậy góc của MN và $(BA'C')$ là $\widehat{MKH}$

$$\Delta KBN \sim \Delta KJM \Rightarrow \frac{KN}{KM} = \frac{NB}{MJ}$$

$$\Rightarrow \frac{KN + KM}{KM} = \frac{NB + MJ}{MJ}$$

$$\Rightarrow MK = \frac{MJ \cdot NM}{NB + MJ} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow MK = \frac{a\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\Delta KHM \perp \Rightarrow \sin \widehat{MKH} = \frac{HM}{MK} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{11}}}{\frac{a\sqrt{5}}{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{55}}$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện đều cạnh a. Tính góc giữa :

- Các cặp cạnh đáy.
- Các cạnh bên và mặt đáy.

2. Cho hình chóp tứ giác đều đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa :

- Cạnh bên và mặt đáy.
- Cạnh bên với đường chéo của mặt đáy.

3. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, SA, SB, SC đều tạo với mp (ABC) góc α .

- Chứng minh hình chiếu vuông góc của S trên mp (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- Tính khoảng cách từ S đến mp (ABC).

4. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trên mặt phẳng sao cho $\widehat{xOy} = \widehat{xOz} = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ và $\widehat{yOz} = \beta$. Gọi γ là góc của Ox và (yOz).

$$\text{Chứng minh } \cos \gamma = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

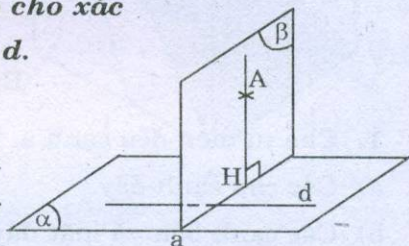
5. Cho tứ diện ABCD có ba mặt ABC, ACD, ADB vuông tại A. Lấy M là điểm bên trong ΔBCD . Gọi α, β, γ là góc của AM với các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ADB). Chứng minh $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.

Chủ đề 17

- DỰNG ĐƯỜNG THẲNG QUA ĐIỂM A CHO TRƯỚC VÀ VUÔNG GÓC mp (α) CHO TRƯỚC
- TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM A ĐẾN mp (α)

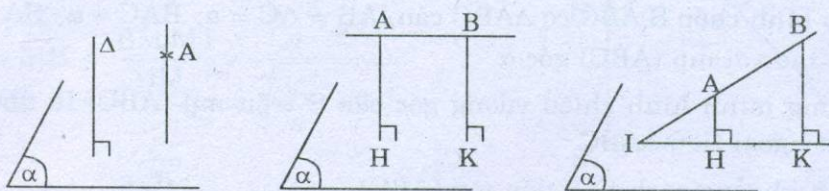
Phương pháp

- Chọn đường thẳng d trong mp (α) sao cho xác định được mp (β) qua A và vuông góc d .
- Xác định giao tuyến a của (α) và (β).
- Trong mp (β) dựng AH vuông góc a thì AH là đường thẳng qua A và vuông góc mp (α) và $AH = d(A, mp(\alpha))$.



Chú ý :

1. Nếu đã có sẵn Δ vuông góc mp (α) chỉ cần dựng đường thẳng qua A và song song Δ .



2. Nếu $AB \parallel mp(\alpha)$ thì $d(A, \alpha) = d(B, \alpha)$.
3. Nếu AB cắt mp (α) tại I thì $\frac{d(A, \alpha)}{d(B, \alpha)} = \frac{IA}{IB}$.
4. Tính thể tích V khối chóp và diện tích đáy thì suy ra được đường cao (Xem chủ đề 23).

BT1. Tuyển sinh ĐH khối D 2002

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mp (ABC), $AC = AD = 4$, $AB = 3$, $BC = 5$. Tính khoảng cách từ A đến mp (BCD).

BT3. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, SA vuông góc mp (ABC) và SA = h.

- a) Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC) theo a và h.
 b) Gọi O là tâm đường tròn qua A, B, C và H là trực tâm Δ SBC. Chứng minh OH vuông góc mp (SBC).

a) Gọi M trung điểm BC, do Δ ABC đều nên $BC \perp AM$.

Ta có $BC \perp AM$ và SA nên $BC \perp$ mp (SAM).

Vẽ $AK \perp SM$, do $AK \subset$ mp (SAM) nên $BC \perp AK$.

Vậy $AK \perp$ mp (SAM).

Δ SAM vuông tại A

$$\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{3a^2 + 4h^2}{3a^2h^2}$$

$$\Rightarrow AK = d(A, \text{mp (SBC)}) = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}.$$

b) O là tâm của Δ ABC đều nên $BO \perp AC$.

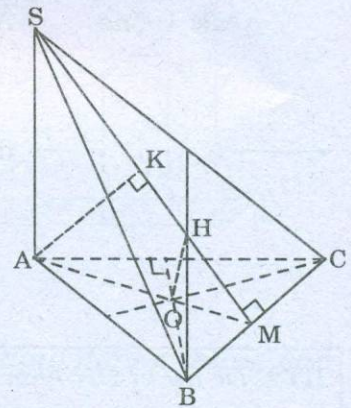
Mà $SA \perp$ mp (ABC) $\Rightarrow SA \perp OB$

Vậy $OB \perp$ mp (SAC) $\Rightarrow OB \perp SC$

H là trực tâm Δ SBC $\Rightarrow BH \perp SC$

Do đó $SC \perp$ mp (OBH) $\Rightarrow SC \perp OH$

Mặt khác $BC \perp$ mp (SAM) $\Rightarrow BC \perp OH$. Do đó $OH \perp$ mp (SBC) ■



BT4. Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối A 2002

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc mp (ABC), $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC) theo a.

Gọi I là trung điểm BC, ta có : $AI \perp BC$.

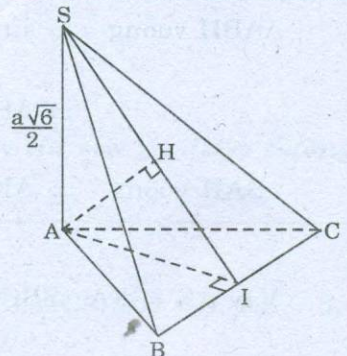
$SA \perp$ mp (ABC) $\Rightarrow SA \perp BC$

Vậy $BC \perp$ mp (SAI)

Vẽ $AH \perp SI$

Ta có $BC \perp$ mp (SAI) $\Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp$ mp (SBC)



$$\text{Ta có : } AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta SAI \text{ vuông tại A} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AI}{SI}$$

$$\Rightarrow d(A, \text{mp}(SBC)) = AH = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{6a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \blacksquare$$

BT5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD vuông tại A và D, $AB = AD = a$, $CD = 2a$, cạnh SD vuông góc mp (ABCD), $SD = a$.

a) Chứng minh ΔSBC vuông. Tính diện tích ΔSBC .

b) Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC).

a) Gọi H là trung điểm CD.

Ta có : $HB = HD = HC = a$ nên ΔBDC vuông tại B.

Ta có : $BC \perp BD \Rightarrow BC \perp SB$

Vậy ΔSBC vuông tại B.

$$\Delta SBD \text{ vuông} \Rightarrow SB^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

$$\Delta BDC \text{ vuông cân} \Rightarrow BC = BD = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy : } dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2} BC \cdot BS = \frac{a^2 \sqrt{6}}{2}.$$

b) Vẽ $DK \perp SB$ (1)

Ta có : $BC \perp \text{mp}(SBD)$

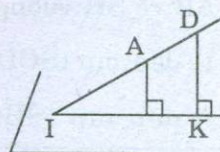
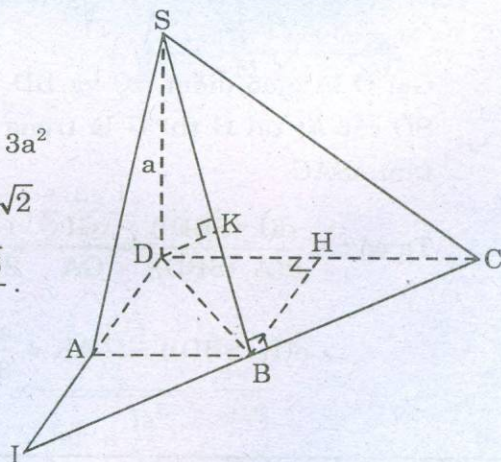
$$\Rightarrow BC \perp DK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DK \perp \text{mp}(SBC)$

$$\Delta SBD \text{ vuông} \Rightarrow DK = \frac{SD \cdot DB}{SB} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

BC cắt AD tại I thì A là trung điểm ID.

$$\text{Ta có : } \frac{d(A, (SBC))}{d(D, (SBC))} = \frac{IA}{ID} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{1}{2} DK = \frac{a\sqrt{6}}{6} \quad \blacksquare$$



BT6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc (ABCD), $SA = a$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC đến mp (SBD).

Vẽ $AH \perp BD$ và $AK \perp SH$

Ta có : $BD \perp AH$ và SA nên $BD \perp mp(SAH) \Rightarrow BD \perp AK$

Ta có : $AK \perp SH$ và BD nên $AK \perp mp(SBD)$

$$\triangle ABD \text{ vuông} \Rightarrow AH = \frac{AD \cdot AB}{BD} = \frac{a \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

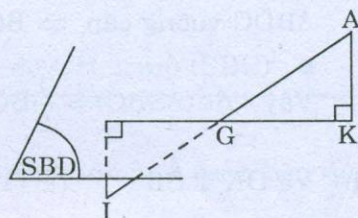
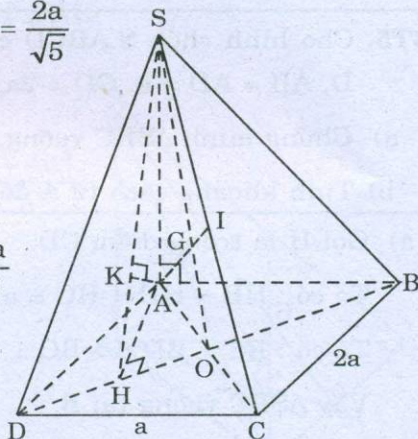
$$\triangle SAH \text{ vuông} \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AH}{SH}$$

$$AK = \frac{a \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}}} = \frac{2a}{3}$$

Gọi O là giao điểm AC và BD.
SO cắt AI tại G thì G là trọng tâm $\triangle SAC$.

$$\text{Ta có : } \frac{d(I, (SBD))}{d(A, (SBD))} = \frac{GI}{GA} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(I, (SBD)) = \frac{1}{2}AK = \frac{a}{3} \quad \blacksquare$$



BT7. Cho hình thoi ABCD tâm O, cạnh a , $AC = a$. Từ H là trung điểm của AB vẽ SH vuông góc mp (ABCD) và $SH = a$. Tính các khoảng cách từ:

a) H đến mp (SCD).

b) O đến mp (SCD).

c) A đến mp (SBC).

a) $\triangle ABC$ đều nên $CH \perp AB$ mà $AB \parallel CD$
nên $CH \perp CD$.

Mặt khác : $CD \perp SH$

Vậy $CD \perp (SHC)$.

Về $HK \perp SC$ thì $HK \perp (SCD)$.

$$\Delta SHC \text{ vuông} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HC}{SC}$$

$$\Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

b) Gọi I là trung điểm của CD thì OH cắt (SCD) tại I, do đó :

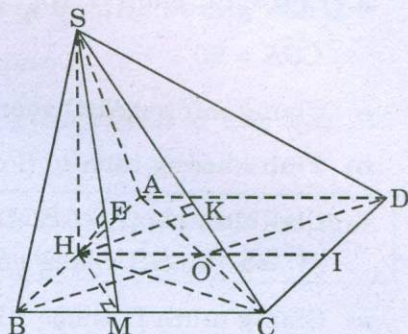
$$\frac{d(O, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{IO}{IH} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(O, (SCD)) = \frac{1}{2}HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

c) Về $HM \perp BC$ và $HE \perp SM$.

Ta có $BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp HE$

Vậy $HE \perp (SBC)$.



$$\Delta HBC \text{ vuông} \Rightarrow HM = \frac{HB \cdot HC}{BC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Delta SHM \text{ vuông} \Rightarrow HE = \frac{SH \cdot HM}{SM} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$\text{Vậy } d(H, (SBC)) = HE = \frac{a\sqrt{57}}{19}.$$

Ta có AH cắt (SBC) tại B.

$$\text{Do đó } \frac{d(A, (SBC))}{d(H, (SBC))} = \frac{BA}{BH} = 2 \Rightarrow d(A, (SBC)) = 2HE = \frac{2a\sqrt{57}}{19} \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABCD có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại bằng a .
 - a) Chứng minh $\triangle SAC$ vuông.
 - b) Tính khoảng cách từ S đến mp (ABCD).
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , $SA = a$, SA vuông góc mp (ABCD). Gọi I là trung điểm của SA. Tính khoảng cách từ S đến mp (ICD).
3. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$.
 - a) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông.
 - b) Tính khoảng cách từ S đến mp (ABC).
4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Vẽ SH vuông góc mp (ABCD).
 - a) Chứng minh H thuộc BD và AC vuông góc mp (SBD).
 - b) Gọi M là trung điểm của SB. Chứng minh SB vuông góc mp (MAC).
 - c) Chứng minh $\triangle SBD$ vuông.
5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a tâm O, SA vuông góc mp (ABCD), $SA = a\sqrt{3}$. Tính các khoảng cách :
 - a) Từ A đến mp (SBC).
 - b) Từ O đến mp (SBC).
 - c) Từ trọng tâm của $\triangle SAB$ đến mp (SBC).
6. Trong mặt phẳng (α) cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Dựng hai đoạn $BB' = a$, $CC' = 2a$ cùng vuông góc và cùng phía đối với (α) . Tính khoảng cách từ :
 - a) Điểm C' đến mp (ABB').
 - b) Trung điểm của B'C đến mp (ACC').
 - c) Điểm B' đến mp (ABC').
 - d) Trung điểm của BC đến mp (AB'C').

XÁC ĐỊNH MẶT CẮT CỦA ĐA DIỆN VÀ mp (α) QUA ĐIỂM M CHO TRƯỚC VÀ VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG d CHO TRƯỚC

Phương pháp

- Vẽ đường thẳng d qua M và vuông góc (α).
- Tìm thêm trong hình vẽ một đường thẳng b cùng vuông góc d .
- $Mp(\alpha)$ là mp (a, b) hay qua a và song song b .
- Sử dụng các phương pháp tìm đoạn giao tuyến ở các chủ đề trước để xác định mặt cắt.

BT1. Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc mp (ABC) và $\triangle ABC$ đều. Xác định mặt cắt của tứ diện S.ABC và mặt phẳng (α) qua B vuông góc SC.

Vẽ $BH \perp SC$ (1)

Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có : $BI \perp AC$ (do $\triangle ABC$ đều)

và $BI \perp SA$ (do $SA \perp mp(ABC)$)

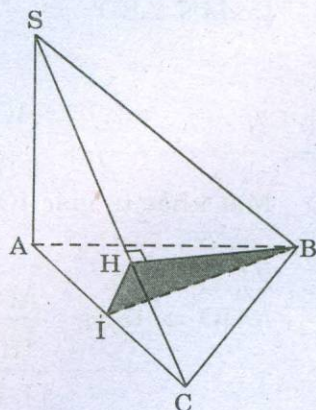
$\Rightarrow BI \perp mp(SAC)$

$\Rightarrow BI \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) : $SC \perp mp(BIH)$

Do $BI \perp mp(SAC) \Rightarrow BI \perp IH$

Vậy mặt cắt là $\triangle BIH$ vuông tại I ■



BT2. Cho hình chóp tứ giác đều. Thiết diện qua một đỉnh của đáy và vuông góc cạnh bên đối diện bằng nửa diện tích đáy. Tính sin góc của cạnh bên và đáy.

Trên mp (SAC) vẽ $AH \perp SC$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Ta có : $BD \perp AC$, SO nên $BD \perp mp(SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Vậy mặt cắt là mp (α) chứa AH và song song BD.

Trên mp (SAC), AH cắt SO tại I.

Do $(\alpha) \parallel BD$ nên (α) cắt mp (SBD) theo giao tuyến MN qua I và $\parallel BD$.

Góc của cạnh bên SC và đáy là $\varphi = \widehat{SCO}$.

Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình chóp.

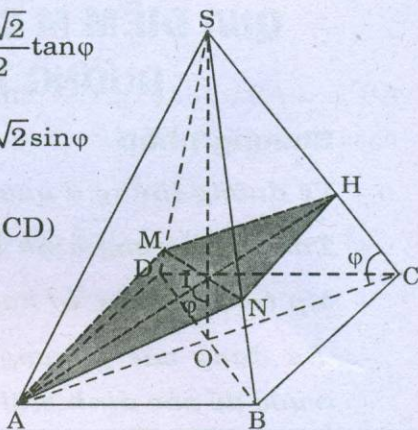
$$\Delta SOC \text{ vuông} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{SO}{OC} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi$$

$$\Delta AHC \text{ vuông} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = a\sqrt{2} \sin \varphi$$

$$\text{Theo giả thiết thì dt (AMHN)} = \frac{1}{2} \text{ dt (ABCD)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AH \cdot MN = \frac{1}{2} a^2$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a^2}{AH} = \frac{a}{\sqrt{2} \sin \varphi}$$



$$\text{Do } MN \parallel BD \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{MN}{BD} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2} \sin \varphi}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2 \sin \varphi} \Rightarrow \frac{SO - SI}{SO} = \frac{2 \sin \varphi - 1}{2 \sin \varphi}$$

$$\Rightarrow IO = \frac{2 \sin \varphi - 1}{2 \sin \varphi} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi = \frac{(2 \sin \varphi - 1)}{4 \cos \varphi} \cdot a\sqrt{2}$$

Mặt khác tứ giác IOCH có $\widehat{O} = \widehat{H} = 1v$ nên $\widehat{AIO} = \widehat{HCO} = \varphi$

$$\Delta AIO \Rightarrow \tan \varphi = \frac{AO}{IO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}(2 \sin \varphi - 1)}{4 \cos \varphi}} = \frac{2 \cos \varphi}{2 \sin \varphi - 1}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi (2 \sin \varphi - 1) = 2 \cos^2 \varphi = 2(1 - \sin^2 \varphi) \Rightarrow 4 \sin^2 \varphi - \sin \varphi - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \vee \sin \varphi = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \text{ (loại)} \quad \blacksquare$$

BT3. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy $2a$, chiều cao a .

- Tìm thiết diện của hình lăng trụ và mặt phẳng qua B' vuông góc $A'C$.
- Tính diện tích thiết diện trên.

a) Gọi M, M', N, R lần lượt là trung điểm AC, A'C', AM và AB.

$$\Delta A'B'C' \text{ đều} \Rightarrow B'M' \perp A'C'$$

$$\text{mà } AA' \perp \text{đáy } (ABC) \Rightarrow AA' \perp B'M'$$

$$\text{Vậy } B'M' \perp mp(AA', CC')$$

$$\Rightarrow B'M' \perp A'C' \quad (1)$$

Gọi I trung điểm AA' ta có $A'C' \parallel MI$

Mà M'A'AM là hình vuông cạnh a

$$\Rightarrow M'N \perp MI.$$

$$\text{Do đó } M'N \perp A'C' \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Mặt cắt là mp(B'M'N). Mặt phẳng này cắt hai mặt phẳng song song (ABC) và (A'B'C') theo hai giao tuyến B'M' và NR song song nhau.

$$\text{Mặt khác: } B'M' \perp (AC, A'C') \Rightarrow B'M' \perp M'N.$$

Do đó mặt cắt là hình thang vuông B'M'NR.

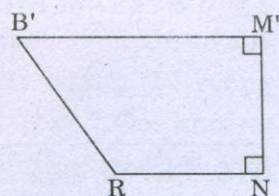
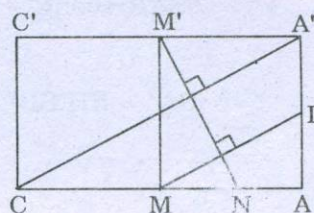
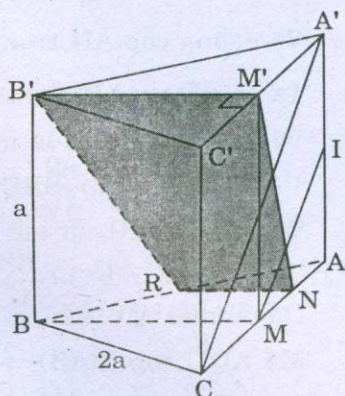
$$\text{b) } \Delta M'MN \text{ vuông} \Rightarrow M'N^2 = MM'^2 + MN^2$$

$$\Rightarrow M'N^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

M'B' là đường cao của tam giác đều cạnh 2a nên

$$M'B' = \frac{(2a)\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \quad \text{và} \quad NR = \frac{BM}{2} = \frac{M'B'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } dt(B'M'NR) &= \frac{M'N}{2}(M'B' + NR) = \frac{a\sqrt{5}}{4} \left(a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{8} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



BT4. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc mp (ABCD), $SA = a\sqrt{2}$, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc góc SB. Mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện đó theo a.

- Ta có : $AD \perp SA$ và $AB \Rightarrow AD \perp mp(SAB) \Rightarrow AD \perp SB$

Vẽ đường cao AH trong $\triangle ASB$.

Ta có AD và AH qua A và vuông góc SB.

Vậy mp (α) chính là mp (AHD).

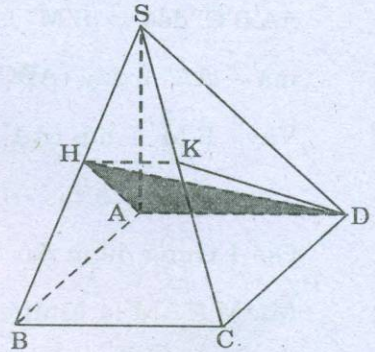
Ta có : $AD \parallel mp(SBC)$ mà $AD \subset mp(AHD)$.

Vậy mp (SBC) cắt mp (AHD) theo giao tuyến $HK \parallel AD$.

Do đó mặt cắt là hình thang ADKH.

Mà $AD \perp mp(SAB) \Rightarrow AD \perp AH$

Vậy ADKH là hình thang vuông.



$$\triangle SAB \text{ vuông} \Rightarrow AH = \frac{AS \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{và } SA^2 = SH \cdot SB \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{2a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

$$\text{Ta có : } HK \parallel BC \Rightarrow \frac{HK}{BC} = \frac{SH}{SB} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot BC}{SB} = \frac{\frac{2\sqrt{3}a}{3} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } dt(ADKH) &= \frac{AH}{2}(HK + AD) \\ &= \frac{a\sqrt{6}}{6} \left(\frac{2}{3}a + a \right) = \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{5a}{3} = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

BT5. Cho tứ diện S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, $SA = a$, SA vuông góc mp (ABC). Gọi I là trung điểm BC. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc SI. Xác định và tính diện tích mặt cắt của (α) và tứ diện.

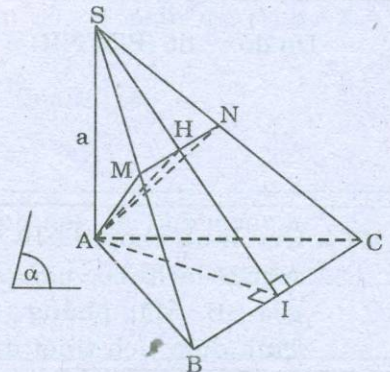
- Trong mp (SAI), vẽ $AH \perp SI$ (1)

$$\triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow BC \perp AI \Rightarrow BC \perp SI \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (\alpha)$ là mặt phẳng chứa AH và song song BC.

Do (α) $\parallel BC$ nên (α) cắt mp (SBC) theo giao tuyến MN qua H và song song BC.

Vậy mặt cắt là $\triangle AMN$.



• ΔSAI vuông $\Rightarrow SI^2 = SA^2 + AI^2$

$$\Rightarrow SI^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{4}$$

và $SA^2 = SH.SI \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SI} = \frac{2a}{\sqrt{7}}$

Ta có : $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{SH}{SI} \Rightarrow MN = \frac{SH}{SI} \cdot BC = \frac{2a}{\sqrt{7} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2}} \times a = \frac{4a}{7}$

Ta có : $dt(\Delta SAI) = \frac{1}{2} AH.SI = \frac{1}{2} SA.AI$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AI}{SI} = \frac{a \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Do đó : $dt(\Delta AMN) = \frac{1}{2} AH.MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{4a}{7} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{7\sqrt{7}} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$ ■

BT6. Cho tam giác cân ABC , $AB = AC = a\sqrt{5}$, $BC = 4a$. Trên nửa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác tại A lấy một điểm D sao cho $AD = a\sqrt{3}$. Người ta cắt hình chóp bằng một mặt phẳng (P) vuông góc với đường cao AH của ΔABC , thiết diện là hình gì ? Gọi khoảng cách từ A tới mặt phẳng (P) là x , tính diện tích thiết diện theo a và x . Tính x để cho diện tích đó lớn nhất.

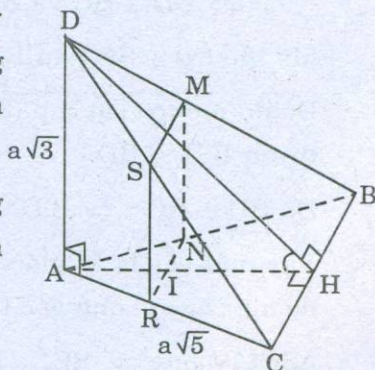
Ta có : $AH \perp BC$ và AD

Vậy (P) là mặt phẳng song song BC và AD .

Ta có : $BC \parallel (P)$ nên (P) cắt hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) theo hai giao tuyến NR và MS với $NR \parallel MS \parallel BC$.

Ta có : $AD \parallel (P)$ nên (P) cắt hai mặt phẳng (ADC) và (BAD) theo hai giao tuyến RS và NM với $RS \parallel NM \parallel AD$.

Mặt khác : $NM \parallel AD$ và $AD \perp NR$



$\Rightarrow MN \perp NR$ hay MNRS là hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của AH và NR.

AH $\perp$ mp (MNRS) nên AI là khoảng cách từ A đến mp (P). Vậy AI = x.

$$\triangle ABC \Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{RN}{BC} \Rightarrow RN = \frac{AI}{AH} \cdot BC = \frac{x}{\sqrt{5a^2 - 4a^2}} \cdot 4a = 4x$$

Ta có : RS // AD và NR // BC

$$\Rightarrow \frac{RS}{AD} = \frac{CR}{CA} = \frac{IH}{HA} \Rightarrow RS = AD \cdot \frac{IH}{HA} = \frac{a\sqrt{3}(a-x)}{a} = \sqrt{3}(a-x)$$

Do đó : dt (MSRN) = RN.RS = $4\sqrt{3}x(a-x)$

Do bất đẳng thức Cauchy : $x + (a-x) \geq 2\sqrt{x(a-x)} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} \geq x(a-x)$

Vậy diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ ■

BT7. Cho hình thoi ABCD tâm O, AC = 4a, BD = 2a. Trên đường thẳng vuông góc mp (ABCD), tại O lấy điểm S với $SO = 2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

a) Chứng minh tứ giác AB'C'D' có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích AB'C'D'.

b) Chứng minh $\triangle B'C'D'$ đều.

a) • Ta có : BD $\perp$ AC và SO

nên BD $\perp$ mp (SAC)

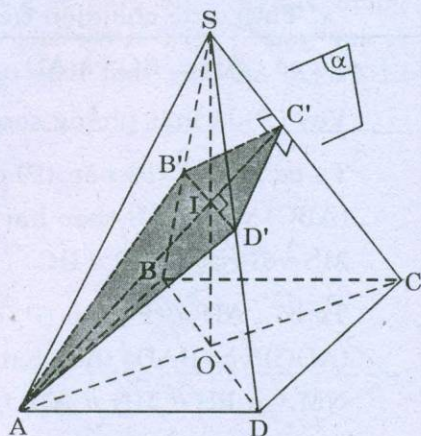
$\Rightarrow BD \perp SC$ và AC'

Mà mp (α) $\perp$ SC nên BD // mp (α)

Do đó mp (α) cắt mp (SBD) theo giao tuyến B'D' // BD.

Do BD $\perp$ AC' $\Rightarrow B'D' \perp AC'$

Vậy mặt cắt là tứ giác AB'C'D' có hai đường chéo vuông góc tại I.



• $\triangle SOC$ vuông $\Rightarrow SC^2 = SO^2 + OC^2 = 12a^2 + 4a^2 = 16a^2$

Vậy $SA = AC = SC = 4a$ nên ΔSAC đều.

Mà AC' là đường cao nên $AC' = \frac{SC\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$

Ta có I là trọng tâm ΔACS nên $\frac{B'D'}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}BD = \frac{4a}{3}$

Vậy : $dt(AB'C'D') = \frac{1}{2}B'D' \cdot AC' = \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{3} \right) (2a\sqrt{3}) = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

b) Ta có I trung điểm $B'D'$ và $IC' \perp B'D'$ nên $\Delta C'B'D'$ cân tại C' .

$\Delta SAC'$ vuông tại $C' \Rightarrow SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = 16a^2 - 12a^2 = 4a^2$

$\Delta SB'C'$ vuông tại $C' \Rightarrow B'C'^2 = SB'^2 - SC'^2 = \left(\frac{2}{3}SB \right)^2 - 4a^2$

$$\Rightarrow B'C'^2 = \frac{4}{9}(SO^2 + OB^2) - 4a^2 = \frac{4}{9}(12a^2 + a^2) - 4a^2 = \frac{16a^2}{9}$$

$$\Rightarrow B'C' = \frac{4a}{3}$$

Do đó : $C'B' = C'D' = B'D' = \frac{4a}{3}$ nên $\Delta C'B'D'$ đều ■

BT8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $SA = a$, SA vuông góc đáy $ABCD$. Mặt phẳng (Q) qua A vuông góc SC cắt SB, SC, SD tại B', C', D' .

a) Chứng minh tứ giác $AB'C'D'$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Cho $AC = b$, $AB = AD = x$.

- Tìm diện tích tứ giác $AB'C'D'$ theo a, b, x .
- Tìm x để tứ giác $AB'C'D'$ là hình vuông.

a) Do $SA \perp mp(ABCD)$

mà $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$

Ta có : $BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$

Mặt khác $SC \perp mp(Q) \Rightarrow SC \perp AB'$

Vậy $AB' \perp mp(SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C'$

Tương tự, $AD' \perp SC, CD \Rightarrow AD' \perp mp(SCD) \Rightarrow AD' \perp C'D'$

Do đó $\widehat{AB'C'} = \widehat{AD'C'} = 1v$ nên tứ giác $AB'C'D'$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) • Do $AB = AD \Rightarrow SB = SD$

$\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow AB' = AD'$

$\Rightarrow \Delta AB'C' = \Delta AC'D'$

Vậy : $dt(AB'C'D') = 2dt(\Delta AB'C')$

ΔSAB vuông

$$\Rightarrow AB' = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

ΔSAC vuông $\Rightarrow AC' = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

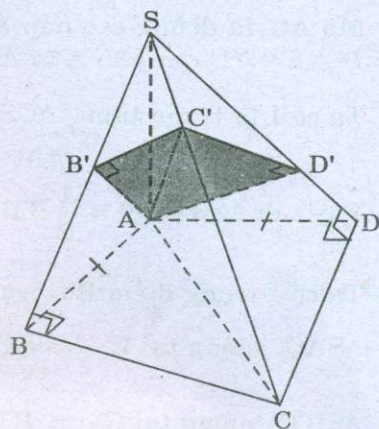
$\Delta AB'C'$ vuông $\Rightarrow B'C'^2 = AC'^2 - AB'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a^2x^2}{a^2 + x^2}$

Do đó : $dt(AB'C'D') = AB' \cdot B'C' = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot a \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2} - \frac{x^2}{a^2 + x^2}}$

• $AB'C'D'$ là hình vuông $\Leftrightarrow AB' = B'C'$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{a^2 + x^2} = a^2 \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} - \frac{x^2}{a^2 + x^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{a^2 + x^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2b^2}{2a^2 + b^2} \quad \blacksquare$$



BT9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có ABD và CBD là hai tam giác đều cạnh a . Cạnh $SA = h$ và vuông góc đáy. Gọi O là giao điểm AC và BD , M là điểm di động trên AC (M khác A và C). (Q) là mặt phẳng qua M và vuông góc AC .

a) Tùy theo M thuộc OC hay thuộc OA , hãy chỉ rõ thiết diện mà (Q) cắt hình chóp.

b) Đặt $x = MC$. Tính diện tích thiết diện trên theo x, a, h .

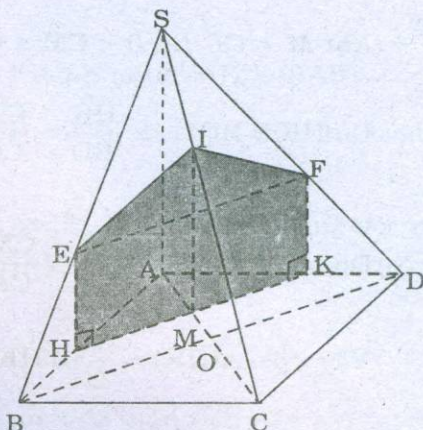
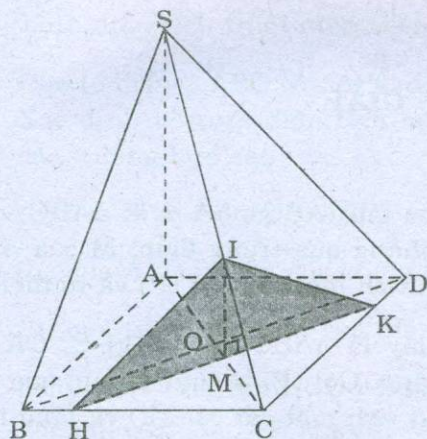
a) Do $AC \perp BD$, $SA \perp AC$ nên (Q) là mặt phẳng qua M và song song SA, BD .

- Khi $M \in OA$

Mp (Q) song song BD, vậy cắt mp (ABCD) theo giao tuyến HK qua M và song song BD.

Mp (Q) song song SA, vậy cắt các mp (SAB), (SAC), (SAD) theo các giao tuyến HE // MI // KF // SA.

Mặt cắt là ngũ giác HKFIE.



- Khi $M \in OC$

Mp (Q) song song BD, vậy cắt mp (ABCD) theo giao tuyến HK qua M và song song BD.

Mp (Q) song song SA, vậy cắt mp (SAC) theo giao tuyến MI song song SA.

Mặt cắt là $\triangle IHK$.

- b) • Khi $M \in OA$ do $CO \leq CM < CA$ nên $\frac{a\sqrt{3}}{2} \leq x < a\sqrt{3}$

$$\text{Do } MH \parallel BD \Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{HM}{BO} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{(a\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do } \begin{cases} HE \parallel SA \\ HM \parallel OB \end{cases} \Rightarrow \frac{HE}{SA} = \frac{BH}{BA} = \frac{OM}{OA} \Rightarrow HE = h \cdot \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = h \cdot \frac{2x - a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}}$$

$$\text{Do } MI \parallel SA \Rightarrow \frac{MI}{SA} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow MI = \frac{hx}{a\sqrt{3}}$$

Ngũ giác HEIFK gồm hai hình thang vuông bằng nhau nên

$$dt(HEIFK) = 2dt(HEIM) = HM \cdot (HE + MI)$$

$$= \frac{a\sqrt{3} - x}{\sqrt{3}} \left[\frac{h}{a\sqrt{3}} (2x - a\sqrt{3}) + \frac{hx}{a\sqrt{3}} \right] = \frac{h}{3a} (a\sqrt{3} - x) [3x - a\sqrt{3}]$$

- Khi $M \in OC$ thì $0 < CM \leq CO$ nên $0 < x \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Do } HK \parallel BD \Rightarrow \frac{HK}{BD} = \frac{CM}{CO} \Rightarrow HK = \frac{ax}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do } MI \parallel SA \Rightarrow \frac{MI}{SA} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow MI = \frac{hx}{a\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } dt(\Delta IHK) = \frac{1}{2} MI \cdot HK = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{hx}{a\sqrt{3}} = \frac{h}{3a} x^2 \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc mp (ABC) , $SA = a$, ΔABC vuông cân tại B , $BA = a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua trung điểm M của AB và vuông góc SB . Xác định và tính diện tích mặt cắt của (P) và tứ diện.
2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là ΔABC vuông tại C , $CA = a$, $CB = b$. Mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng qua C và vuông góc AB' . Xác định và tính diện tích mặt cắt của (P) và lăng trụ.
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $BA = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc mp $(ABCD)$, $SA = 2a$. Lấy điểm M trên AB sao cho $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc AB . Xác định và tính diện tích thiết diện của (α) và hình chóp.
4. Cho tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc mp (ABC) , $SA = a$, ΔABC đều cạnh a . Gọi I là trung điểm của AB . Lấy điểm M di động trên AC với $AM = x$ ($0 < x < a$). Qua M vẽ mp (α) vuông góc với AB .
 - a) Chứng minh $CI \perp (SAB)$.
 - b) Mặt phẳng (α) cắt tứ diện theo mặt cắt là hình gì?
 - c) Tính diện tích mặt cắt theo a và x .
 - d) Tìm x để diện tích mặt cắt lớn nhất.
5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc mp $(ABCD)$, $SA = a$. Lấy điểm M trên AC sao cho $AM = x\sqrt{2}$ với $0 < x < a$.

- a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.
- b) Trên SD lấy điểm K sao cho $SK = AM$. Chứng minh $MK \parallel (SAB)$.
- c) Mặt phẳng (P) qua M và vuông góc AB cắt hình chóp theo hình gì ?
Tìm x để diện tích mặt cắt lớn nhất.
6. Cho tứ diện S.ABC có $\triangle ABC$ vuông cân tại B, $AB = a$, SA vuông góc mp (ABC), $SA = a\sqrt{3}$. Lấy M trên AB với $AM = x$ ($0 < x < a$). Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc AB.
- a) Tìm mặt cắt của (α) và tứ diện S.ABC.
- b) Tính diện tích thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích này lớn nhất.
7. Cho tứ diện S.ABC có $\triangle ABC$ đều cạnh a, SA vuông góc mp (ABC), $SA = a$. Xác định và tính diện tích mặt cắt của tứ diện S.ABC và mp (α) trong các trường hợp sau :
- a) (α) qua S và vuông góc BC.
- b) (α) qua A và vuông góc trung tuyến SI của $\triangle SBC$.
- c) (α) qua trung điểm M của SC và vuông góc AB.
8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mp (ABCD), $SA = a\sqrt{2}$. Vẽ AH vuông góc SB.
- a) Chứng minh $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$.
- b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc SB. (α) cắt hình chóp theo thiết diện hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

GÓC CỦA HAI MẶT PHẶNG

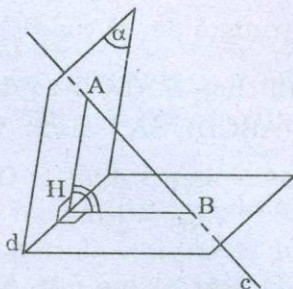
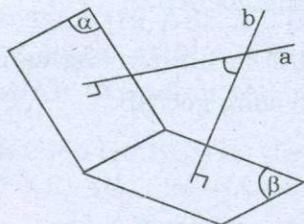
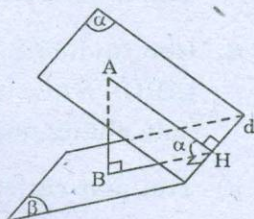
Phương pháp

- Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) , (β) .
- Lấy $A \in mp (\alpha)$ dựng AB vuông góc $mp (\beta)$,
- Vẽ BH vuông góc d thì AH vuông góc d .

Vậy $\widehat{AHB}$ là góc của (α) và (β) .

Chú ý :

- Nếu đa giác (H) trong mặt phẳng (P) có diện tích S , đa giác (H') nằm trong mặt phẳng (P') là hình chiếu vuông góc của (H) có diện tích S' , φ là góc giữa (P) và (P') thì $S' = S \cos \varphi$.
- Nếu đã có đường thẳng $a \perp mp (\alpha)$ và đường thẳng $b \perp mp (\beta)$ thì góc (nhọn) tạo bởi a và b là góc (nhọn) của (α) và (β) .
- Nếu đã có đường thẳng $c \perp d$ và c cắt $mp (\alpha)$ tại A , cắt $mp (\beta)$ tại B , vẽ $AH \perp d$ thì $\widehat{AHB}$ là góc của (α) và (β) .



BT1. Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối B 2002

Cho tam giác ABC vuông cân có cạnh huyền $BC = a$. Trên đường vuông góc với mặt phẳng ABC tại A lấy điểm S sao cho góc của hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60° . Tính SA theo a.

Gọi I là trung điểm BC.

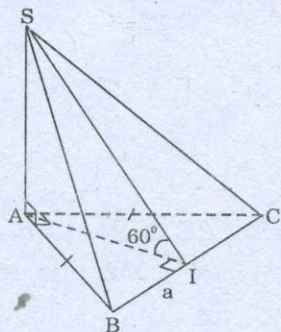
$\triangle ABC$ vuông cân tại A $\Rightarrow AI \perp BC$

Do định lí ba đường vuông góc $\Rightarrow SI \perp BC$

Vậy $\widehat{SIA} = 60^\circ$

$\triangle SAI$ vuông $\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SA}{AI}$

$$\Rightarrow SA = \frac{BC}{2} \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \blacksquare$$



BT2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a$. Tính cosin góc của hai mp (SAB), (SAD).

Gọi I là trung điểm SA.

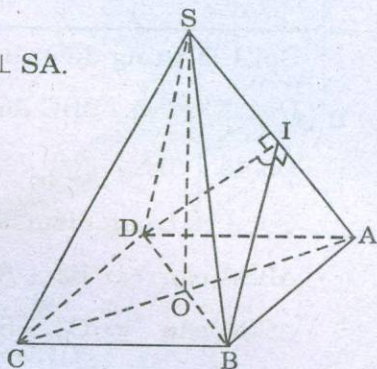
Do $\triangle SAD$ và $\triangle SAB$ đều nên $DI \perp SA$ và $BI \perp SA$.

Vậy $\widehat{DIB}$ là góc phẳng nhị diện cạnh SA.

$$\triangle DIB \Rightarrow BD^2 = DI^2 + IB^2 - 2DI \cdot IB \cdot \cos \hat{I}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{I} = \frac{2DI^2 - BD^2}{2DI \cdot IB} = \frac{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{I} = \frac{\frac{3a^2}{2} - 2a^2}{\frac{3a^2}{2}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos((SAB), (SAD)) = \frac{1}{3} \blacksquare$$



BT3. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại C có $AC = a$, góc của mặt bên (SBC) và đáy (ABC) là φ . Gọi O là trung điểm AB, tính khoảng cách từ O đến mp (SBC) theo a và φ .

Gọi M và N lần lượt là trung điểm BC và SB.

Ta có : $BC \perp CA$ và $SA \Rightarrow BC \perp mp(SAC) \Rightarrow BC \perp SC$

Mà $MN \parallel SC$ nên $MN \perp BC$

Ta có : $OM \parallel AC$ mà $AC \perp BC$

Vậy $OM \perp BC$

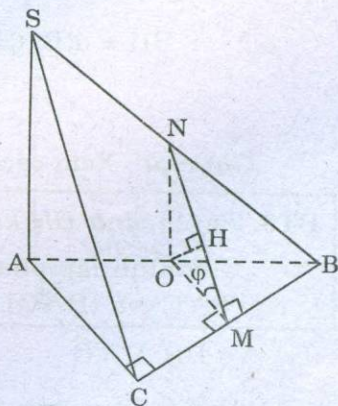
Do đó $\varphi = \widehat{NMO}$ và $BC \perp mp(OMN)$

Từ O vẽ $OH \perp MN$ thì $OH \perp MN$ và BC

nên $OH \perp mp(SBC)$.

Ta có : $\triangle OHM$ vuông $\Rightarrow \sin \varphi = \frac{OH}{OM}$

$$\Rightarrow OH = d(O, mp(SBC)) = \frac{a}{2} \sin \varphi \blacksquare$$



BT4. Đề dự bị ĐH khối A 2007

Cho hình chóp S.ABC có góc của hai mp (SBC) và (ABC) bằng 60° , ABC và SBC là tam giác đều cạnh a. Tính khoảng cách từ B đến mp (SAC).

Gọi I là trung điểm BC

Do $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$ đều nên $AI \perp BC$ và $SI \perp BC$

Do đó : $\widehat{SIA} = 60^\circ$

Gọi J là trung điểm SA, vẽ $BH \perp CJ$

$\triangle BSA$ cân $\Rightarrow BJ \perp SA$

$\triangle CSA$ cân $\Rightarrow CJ \perp SA$

Vậy $SA \perp (BJC) \Rightarrow SA \perp BH$

Ta có : $BH \perp SA$ và CJ nên $BH \perp (SAC)$

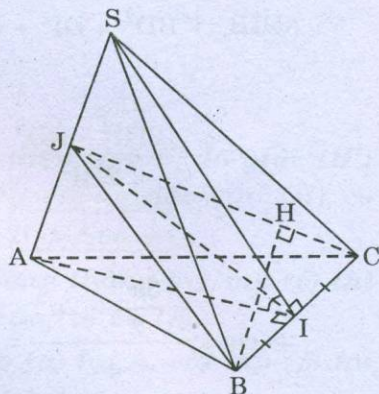
Ta có $\triangle SAI$ đều cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên :

$$IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$$

$$\triangle JIC \text{ vuông tại } I \Rightarrow JC^2 = IJ^2 + IC^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{16}$$

$$\text{Ta có : } dt(\triangle JBC) = \frac{1}{2}IJ \cdot BC = \frac{1}{2}BH \cdot JC \Rightarrow IJ \cdot BC = BH \cdot JC$$

$$\Rightarrow BH = d(B, (SAC)) = \frac{IJ \cdot BC}{JC} = \frac{\frac{3a}{4} \cdot a}{\frac{a\sqrt{13}}{4}} = \frac{3a}{\sqrt{13}} \quad \blacksquare$$



Ghi chú : Xem cách giải 2 dùng thể tích V, bài 19, chủ đề 23.

BT5. Tuyển sinh ĐH khối A 2003

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính số đo của góc giữa hai mp (BA'C) và (DA'C).

Vẽ $DH \perp A'C$

Ta có : $\triangle \text{vuông } A'DC = \triangle \text{vuông } A'BC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow BH = HD$$

Do đó : $\triangle BHC = \triangle DHC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{BHC} = 1v$$

Vậy $\widehat{BHD}$ hay $\pi - 180^0$ là góc giữa hai mp $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

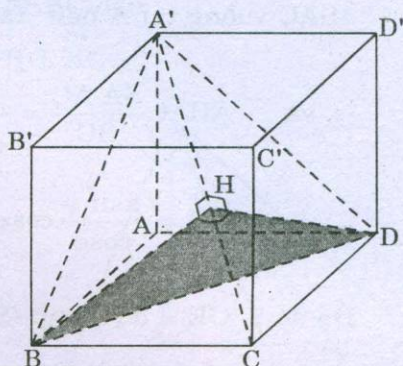
$\triangle A'DC$ vuông tại D

$$\begin{aligned} \Rightarrow DH &= \frac{DA' \cdot DC}{A'C} \\ &= \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

$$\triangle HBD \Rightarrow BD^2 = BH^2 + HD^2 - 2BH \cdot HD \cdot \cos \widehat{BHD}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{BHD} = \frac{2HD^2 - BD^2}{2DH^2} = \frac{2\left(\frac{2}{3}a^2\right) - 2a^2}{\frac{4}{3}a^2} = -\frac{1}{2}$$

Vậy góc của hai mp $(BA'C)$ và $(DA'C)$ là 60^0 . ■



BT6. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC). Đáy là $\triangle ABC$ vuông tại C có $AC = a$. Gọi φ là góc của hai mp (SBC) và mp (ABC) .

- Trên mặt bên (SAC) từ A vẽ $AH \perp SC$. Chứng minh $AH \perp$ mp (SBC) .
- Gọi O là trung điểm AB. Tính khoảng cách từ O đến mp (SBC) theo a và φ .

Do $SA \perp$ mp (ABC) mà $BC \perp CA$

nên $BC \perp SC$ (định lí ba đường vuông góc).

Vậy $\widehat{SCA} = \varphi$ là góc phẳng nhị diện cạnh BC.

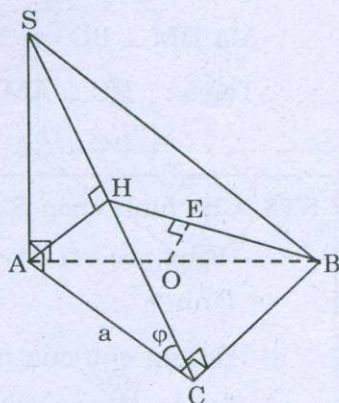
- Vẽ $AH \perp SC$

Ta có : $BC \perp SA$ và AC

$$\Rightarrow BC \perp \text{mp} (SAC) \Rightarrow BC \perp AH$$

Do đó : $HA \perp$ mp (SBC) .

- Gọi E là trung điểm HB, ta có $OE \parallel AH$ mà $AH \perp$ mp $(SBC) \Rightarrow OE \perp$ mp (SBC)



$$\Delta SAC \text{ vuông tại } A \text{ nên } \tan \varphi = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = a \tan \varphi$$

$$\text{và } AH = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{a^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \varphi}} = \frac{a \tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a \sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \cos \varphi = a \sin \varphi$$

$$\text{Do đó : } OE = d(O, mp(SBC)) = \frac{AH}{2} = \frac{a}{2} \sin \varphi \quad \blacksquare$$

BT7. Cho hình chóp S.ABC với đáy là ΔABC có $BC = 2a$, $AB = AC = 3a$. Biết rằng các mặt bên (SAB), (SBC), (SCA) đều tạo với đáy ABC góc 60° . Kẻ đường cao SH của hình chóp. Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC và SA vuông góc BC.

- Từ H vẽ $HM \perp BC$, $HK \perp AB$ và $HN \perp AC$.

Theo định lí ba đường vuông góc thì $SM \perp BC$, $SK \perp AB$, $SN \perp AC$.

Ta có góc tạo bởi các mặt bên và đáy là 60°

$$\text{nên } \widehat{SMH} = \widehat{SKH} = \widehat{SNH} = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } \Delta SHM = \Delta SHK = \Delta SHN$$

$$\Rightarrow HM = HK = HN$$

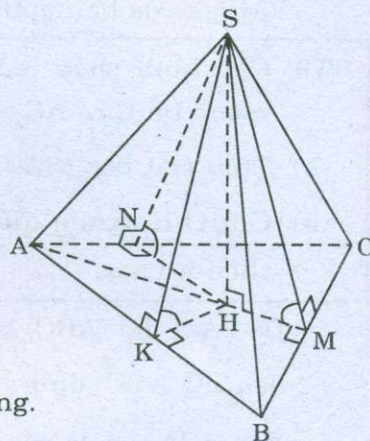
Điểm H cách đều ba cạnh của ΔABC nên là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

- ΔABC cân tại A có AH là đường phân giác trong nên $AH \perp BC$.

Mà $HM \perp BC \Rightarrow$ ba điểm A, M, H thẳng hàng.

Ta có : $BC \perp AM$ và SH nên $BC \perp mp(SAM)$

$$\Rightarrow BC \perp SA \quad \blacksquare$$



BT8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, SA vuông góc với đáy. Góc của mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là 60° . Tính :

- Đường cao của hình chóp.
- Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

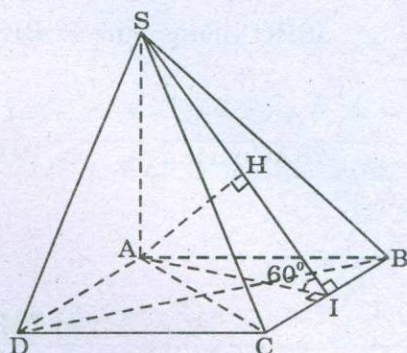
a) ABCD là hình thoi có $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên $\triangle ABC$ đều.

Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow AI \perp BC$ và $SI \perp BC$

Vậy $\widehat{AIS} = (\widehat{SBC}, \widehat{ABCD}) = 60^\circ$

$$\triangle SAI \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SA}{AI} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$



b) Vẽ $AH \perp SI$

Do $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp (SBC)$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{16}{9a^2}$$

$$\Rightarrow AH = d(A, (SBC)) = \frac{3a}{4} \blacksquare$$

BT9. Cho hình chóp S.ABC có SA là đường cao, đáy là $\triangle ABC$ vuông tại B, $\widehat{BSC} = 45^\circ$. Đặt $\widehat{ASB} = \alpha$. Tìm $\sin \alpha$ sao cho góc của hai mp (SBC) và (SAC) là 60° .

Trong mp (ABC) vẽ $BH \perp AC$.

Ta có: $SA \perp \text{mp (ABC)}$ nên $SA \perp BH$.

Do đó: $BH \perp \text{mp (SAC)} \Rightarrow BH \perp SC$

Trên mp (SBC) vẽ $BK \perp SC$ mà $SC \perp BH$

nên $SC \perp \text{mp (BHK)} \Rightarrow SC \perp HK$

Do đó $\widehat{HKB} = \varphi$ là góc của hai mp (SBC)

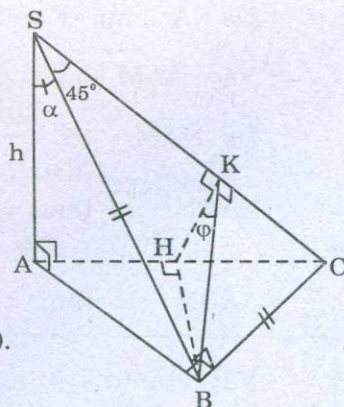
và (SAC)

Ta có: $SA \perp \text{mp (ABC)}$ và $BC \perp BA$

nên $BC \perp SB$ (định lí ba đường vuông góc).

$\triangle SBC$ vuông có $\widehat{BSC} = 45^\circ$ nên là $\triangle$ vuông cân

$\Rightarrow K$ là trung điểm SC.



$$\text{Đặt } SA = h, \triangle SAB \text{ vuông} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AB}{SA} \text{ và } \cos \alpha = \frac{SA}{SB}$$

$$\Rightarrow AB = h \tan \alpha \quad \text{và} \quad SB = \frac{h}{\cos \alpha}$$

$$\Delta SBC \text{ vuông cân} \Rightarrow BK = \frac{SC}{2} = \frac{SB\sqrt{2}}{2} = \frac{h\sqrt{2}}{2\cos \alpha}$$

$$\Delta BAC \text{ vuông} \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{h \tan \alpha \cdot \frac{h}{\cos \alpha}}{\sqrt{h^2 \tan^2 \alpha + \frac{h^2}{\cos^2 \alpha}}}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{\frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha}}} = \frac{h \tan \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + 1}}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \widehat{HKB} = 60^\circ \Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{HB}{BK}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h \tan \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + 1}} \cdot \frac{2 \cos \alpha}{h\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + 1}}$$

$$\Leftrightarrow 3(\sin^2 \alpha + 1) = 8 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \quad \blacksquare$$

BT10. Cho hình vuông ABCD cạnh a trong mặt phẳng (P). Gọi M, N là hai điểm di động trên hai cạnh BC và CD với CM = x, CN = y. Tìm hệ thức giữa x, y sao cho mp (SAM) và mp (SAN) tạo với nhau góc 45°.

Do SA ⊥ mp (P) nên SA ⊥ AM, AN.

Vậy $\widehat{NAM}$ là góc phẳng nhị diện (SAM, SAN).

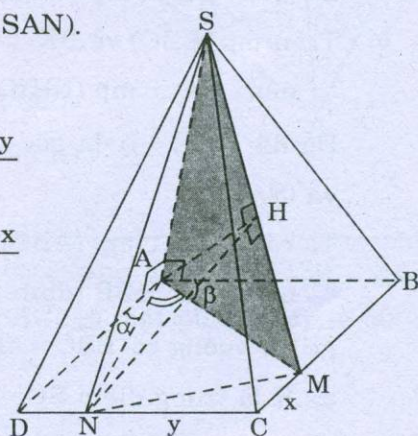
$$\text{Do } \widehat{NAM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DAN} + \widehat{MAB} = 45^\circ$$

$$\Delta ADN \Rightarrow \tan \alpha = \tan \widehat{DAN} = \frac{DN}{AD} = \frac{a - y}{a}$$

$$\Delta ABM \Rightarrow \tan \beta = \tan \widehat{MAB} = \frac{MB}{AB} = \frac{a - x}{a}$$

$$\text{Vậy } \tan(\alpha + \beta) = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = 1$$



$$\Rightarrow \frac{a-y}{a} + \frac{a-x}{a} = 1 - \frac{a-y}{a} \cdot \frac{a-x}{a}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{(y+x)}{a} = -\frac{(a-y)(a-x)}{a^2}$$

$$\Rightarrow a^2 - a(y+x) + (a-y)(a-x) = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2a(x+y) + xy = 0 \quad \blacksquare$$

BT11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm cạnh BB' .

a) Tính diện tích $\triangle MOC$ theo a .

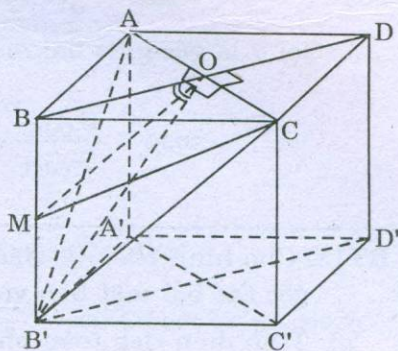
b) Tính $\tan \alpha$ trong đó α là góc giữa mp $(B'OC)$ và mp $(ABCD)$.

a) Ta có : $AC \perp BD$ và $BB' \perp AC$ nên $AC \perp mp(BD, B'D') \Rightarrow AC \perp OM$

$$\triangle BMC \text{ vuông} \Rightarrow MC^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\triangle OMC \text{ vuông} \Rightarrow OM^2 = MC^2 - OC^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$



$$\text{Do đó : } dt(\triangle OMC) = \frac{1}{2} OM \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}.$$

b) Mp $(B'OC)$ và mp $(ABCD)$ có giao tuyến là AC .

Ta có : $AC \perp mp(BD, B'D') \Rightarrow AC \perp B'O$ mà $BD \perp AC$

Vậy $\widehat{BOB'}$ là góc của hai mặt phẳng $(B'OC)$ và $(ABCD)$.

$$\triangle BOB' \text{ vuông} \Rightarrow \tan \widehat{BOB'} = \frac{BB'}{OB} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \quad \blacksquare$$

BT12. Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối A 2003

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm CC' . Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

$$\bullet \Delta ABC \Rightarrow BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ \Rightarrow BC^2 = 3a^2$$

$$\Delta B'BA \Rightarrow B'A^2 = 2a^2$$

$$\Delta ICA \Rightarrow AI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Delta B'C'I \Rightarrow B'I^2 = B'C'^2 + C'I^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$$

$$\text{Ta có : } B'A^2 + AI^2 = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} = B'I^2$$

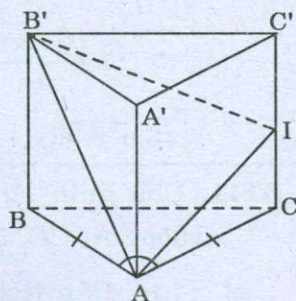
Vậy $\Delta AB'I$ vuông ở A.

$$\bullet \text{ Ta có : } S_{\Delta AB'I} = \frac{1}{2} AI \cdot AB' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I) thì ta có :

$$\cos \varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10} \quad \blacksquare$$



BT13. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD đáy là hình vuông ABCD cạnh a, góc tạo bởi mặt bên và đáy là α ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$).

a) Tính diện tích toàn phần hình chóp.

b) Gọi M là trung điểm BC. Từ M vẽ MK vuông góc mặt bên (SAD). Mặt phẳng (BCK) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện theo a và α .

a) Gọi I là trung điểm AD, ta có :

$OI \perp AD$, $SI \perp AD$ nên $\widehat{SIO} = \alpha$.

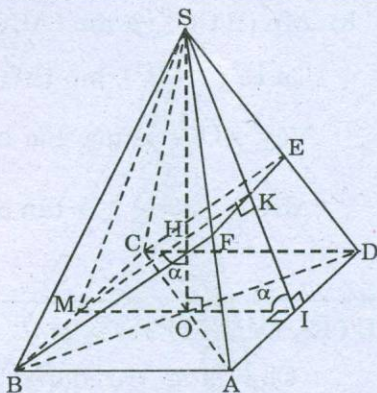
$$\Delta SOI \text{ vuông} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{SO}{OI} \\ \cos \alpha = \frac{OI}{SI} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } SO = \frac{a}{2} \tan \alpha$$

$$\text{và } SI = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

Ta có : Dt toàn phần (S.ABCD) = 4dt (Δ SAD) + dt (ABCD)

$$= 2SI \cdot AD + a^2 = \frac{a^2}{\cos \alpha} + a^2.$$



b) • Ta có $AD \perp MI$ và SO nên $AD \perp mp$ (SMI).

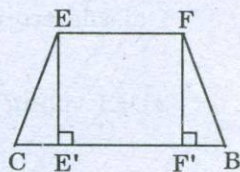
Vẽ $MK \perp SI$ thì $MK \perp AD \Rightarrow MK \perp mp$ (SAD)

Do $BC \parallel AD$ nên mp (BCK) cắt mp (SAD) theo giao tuyến EF qua K và song song AD .

Do $AD \parallel EF$ mà $AD \perp mp$ (SMI) $\Rightarrow EF \perp MK$.

Do $\triangle BFA = \triangle CED$ nên $BF = CE$.

Vẽ EE' và $FF' \perp BC$.



Do $\triangle EE'C = \triangle FF'B$ nên $\hat{B} = \hat{C}$ và $CE' = BF'$.

Vậy mặt cắt $EFBC$ là hình thang cân có MK là đường cao.

• $\triangle MKI$ vuông $\Rightarrow \sin \alpha = \frac{MK}{MI} \Rightarrow MK = a \sin \alpha$

$\triangle SMI$ cân tại S có $\hat{I} = \alpha \Rightarrow \widehat{MSK} = \pi - 2\alpha$

$\triangle SMK$ vuông $\Rightarrow \cot \widehat{MSK} = \frac{SK}{MK}$

$\Rightarrow SK = a \sin \alpha \cdot \cot(\pi - 2\alpha) = -a \sin \alpha \cot 2\alpha$

Do $EF \parallel AD \Rightarrow \frac{EF}{AD} = \frac{SK}{SI} = \frac{-a \sin \alpha \cdot \cot 2\alpha}{\frac{a}{2 \cos \alpha}} = -\sin 2\alpha \cdot \cot 2\alpha = -\cos 2\alpha$

$\Rightarrow EF = -a \cos 2\alpha$

Vậy $dt(EFBC) = \frac{MK}{2}(EF + BC) = \frac{a}{2} \sin \alpha (-a \cos 2\alpha + a)$

$= \frac{a^2}{2} \sin \alpha (1 - \cos 2\alpha) = a^2 \sin^3 \alpha \blacksquare$

BT14. Trên mặt phẳng (P) cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Trên các đường vuông góc mp (P) tại B và C lấy D, E nằm cùng phía (P) sao cho $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $CE = a\sqrt{3}$.

a) Tính AD, AE và DE .

b) ED cắt BC tại M . Chứng minh AM vuông góc mp (ACE). Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (ABC).

a) Gọi K và K' là trung điểm BC và B'C'.

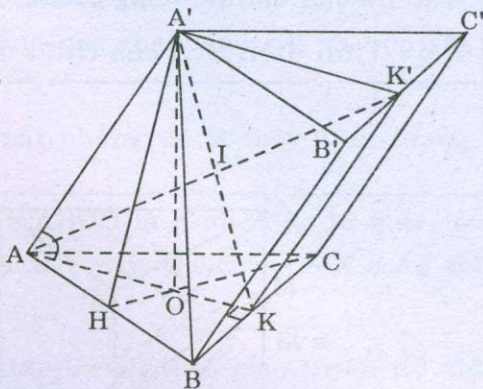
$$AK \perp BC \Rightarrow A'K \perp BC.$$

Vậy $BC \perp mp(AA'K) \Rightarrow BC \perp KK'$

$$\text{Do : } BB' \parallel KK' \Rightarrow BC \perp BB'.$$

Tứ giác $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

Hai tứ giác $AA'B'B$ và $AA'C'C$ là những hình bình hành bằng nhau nên :



$$S_{xq} = S_{BB'C'C} + 2S_{AA'B'B}$$

Ta có : $A'H = \sqrt{A'O^2 + OH^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$

$$BB' = AA' = \sqrt{A'O^2 + AO^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}$$

$$S_{xq} = BB'.CC' + 2.\frac{1}{2} A'H.AB = a \left(\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} + \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} \right).$$

b) Khi $h = a$. Ta có $AK \perp BC$, $K'K \perp BC \Rightarrow \widehat{AKK'}$ chính là góc giữa mặt bên ($BCC'B'$) với đáy (ABC).

$$\widehat{AKK'} = 180^\circ - \widehat{A'AK} \Rightarrow \tan \widehat{AKK'} = -\tan \widehat{A'AK} = -\frac{A'O}{AO} = -\sqrt{3}$$

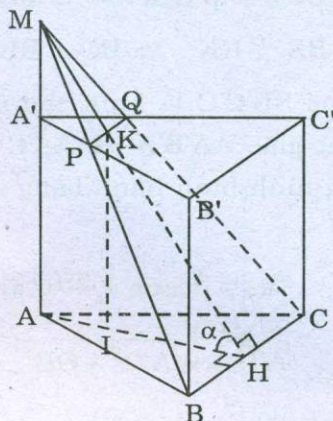
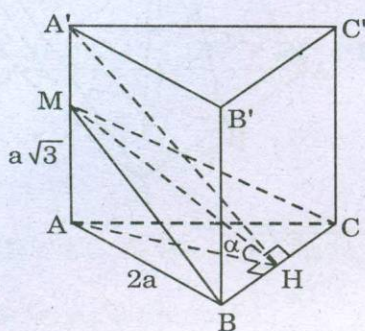
Vậy $\widehat{AKK'} = 120^0$.

c) Tứ giác $AA'K'K$ là hình bình hành nên AK' cắt $A'K$ tại trung điểm I của chúng. $\triangle AA'K$ có AO là đường cao nên muốn $A'K$ đi qua trục tâm của nó thì $AK' \perp A'K \Rightarrow AA'K'K$ là hình thoi $\Rightarrow AA' = AK$

$$\Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

BT16. Cho lăng trụ đứng tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, đường cao của lăng trụ bằng $a\sqrt{3}$. Người ta cắt lăng trụ đã cho bằng một mặt phẳng đi qua cạnh đáy BC và tạo với mặt phẳng đáy một góc nhọn α .

- a) Xác định hình dạng các thiết diện tạo thành tùy theo giá trị của α .
 b) Tính diện tích của thiết diện.



a) Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow AH = a\sqrt{3}$.

Theo giả thiết $AA' = a\sqrt{3} \Rightarrow AA' = AH$

Vậy $\triangle AA'H$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{AHA'} = 45^\circ$. Do đó nếu :

- + $0 < \alpha \leq 45^\circ$ thì điểm M ở trong đoạn AA' . Khi đó thiết diện là $\triangle MBC$ cân ($MB = MC$).
- + $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì điểm M ở ngoài đoạn AA' . Khi đó thiết diện là hình thang cân $BPQC$ ($PB = QC$).

b) + Khi $0 < \alpha \leq 45^\circ$ thì $S_{td} = \frac{1}{2}MH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH}{\cos \alpha} \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{\cos \alpha}$

+ Khi $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $S_{td} = \frac{1}{2}KH \cdot (PQ + BC)$

Kẻ $KI \perp (ABC)$

Ta có : $KH = \frac{AA'}{\sin \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{\sin \alpha}$ và $IH = KI \cot \alpha = a\sqrt{3} \cot \alpha$

$\Rightarrow AI = AH - IH = a\sqrt{3}(1 - \cot \alpha)$ và $PQ = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = 2a(1 - \cot \alpha)$

Do đó : $S_{td} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{\sin \alpha} (2 - \cot \alpha)$ ■

BT17. Cho hình chóp tứ giác đều cạnh đáy a và các mặt bên hợp với mặt đáy một góc α . Dựng một mặt phẳng qua cạnh đáy BC và hợp với mặt đáy một góc β bé hơn α .

Chứng minh rằng thiết diện của mặt phẳng đó là một hình thang cân. Tính diện tích thiết diện đó.

- Gọi SH là đường cao hình chóp, vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Qua H kẻ $MN \parallel AB$ thì $\widehat{SMH} = \alpha$.

Do $BC \parallel mp(SAD)$ nên $mp(P)$ cắt $mp(SAD)$ theo giao tuyến EF thì $EF \parallel BC$. Do đó $BCFE$ là hình thang.

Vì $EF \parallel AD \Rightarrow EA = FD$

Mà $AB = CD = a$ và $\widehat{EAB} = \widehat{FDC}$

nên $\triangle ABE = \triangle DCF \Rightarrow BE = CF$.

Vậy $BCFE$ là hình thang cân.

- Gọi I là giao điểm giữa SM và EF .

Ta có $IN \perp CB$ nên $\widehat{INM} = \beta$

Trong $\triangle MIN$, do định lí hàm số sin, ta có :

$$\frac{IN}{\sin \alpha} = \frac{MN}{\sin[\pi - (\alpha + \beta)]} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow IN = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

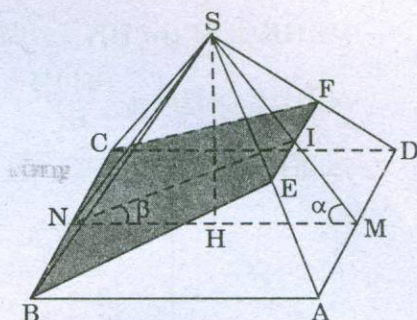
Tương tự như trên trong $\triangle MIN$ tính được $MI = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

$$\text{Ta có : } SM = \frac{MH}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow SI = SM - MI = \frac{a}{2 \cos \alpha} - \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{2 \cos \alpha \sin(\alpha + \beta)}$$

$$\text{Trong } \triangle SAD \text{ ta có : } \frac{EF}{AD} = \frac{SI}{SM} \Rightarrow EF = AD \cdot \frac{SI}{SM} = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } dt(BCFE) &= \frac{IN}{2}(EF + CB) = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)} \left[\frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} + a \right] \\ &= \frac{a^2 \sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



BT18. Cho ABCD là hình vuông cạnh a. Từ H trung điểm AB vẽ d vuông góc với (ABCD). Trên d lấy điểm S sao cho góc của hai mặt phẳng (SAD) và (ABCD) là 60° .

- Tính khoảng cách từ H đến mp(SCD)
- Gọi M trung điểm AB. Chứng minh CM vuông góc SD. Tính góc của hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).
- Tính góc của hai mp(SBC) và (SMC).

a) Ta có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SA$ mà $AD \perp AB$.

Vậy $\widehat{SAB} = 60^\circ$ là góc của (SAD) và (ABCD). Do đó ΔSAB đều

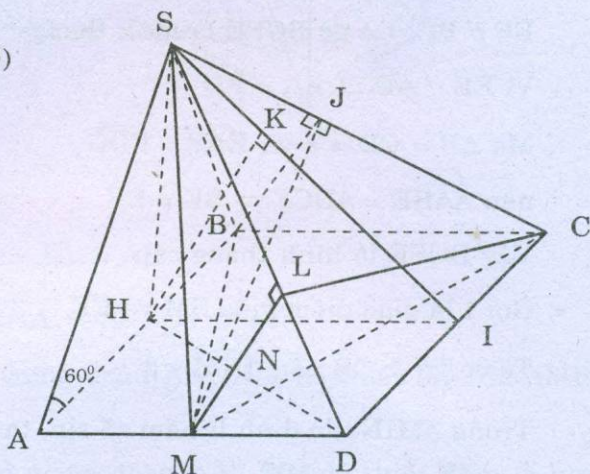
Gọi I trung điểm CD

Vẽ $HK \perp SI$ thì $HK \perp (SCD)$

$$\Delta SHI \perp \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HI}{SI}$$

$$\Rightarrow d(H, (SCD)) = HK$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$



b) Ta có $\Delta HAD = \Delta MCD \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1}$

$$\text{Mà } \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \widehat{CDA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{D_2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta NCD \perp \text{ tại } N$$

$$\Rightarrow CM \perp DH \quad (1)$$

$$\text{Mà } SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CM \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MC \perp (SDH)$$

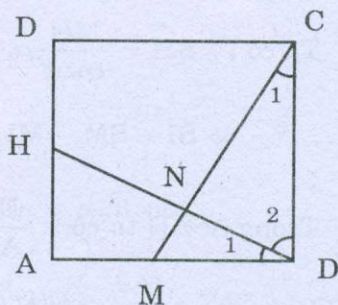
$$\Rightarrow MC \perp SD$$

$$\text{Vẽ } ML \perp SD$$

$$\text{Mà } SD \perp CM \text{ nên } SD \perp (MLC)$$

$$\Rightarrow SD \perp LC$$

Vậy góc của (SAD) và (SCD) là $\widehat{MLC}$ hay $180^\circ - \widehat{MLC}$



$$\Delta CMD \perp \Rightarrow CM^2 = MD^2 + CD^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Delta MDL \perp \text{cân} \Rightarrow LD = ML = \frac{MD}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\Delta LCD \perp \Rightarrow LC^2 = CD^2 - LD^2 = a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{7a^2}{8}$$

$$\Delta MLC \Rightarrow MC^2 = LM^2 + LC^2 - 2LM.LC\cos \widehat{MLC}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \widehat{MLC} &= \frac{LM^2 + LC^2 - MC^2}{2ML.LC} \\ &= \frac{\frac{a^2}{8} + \frac{7a^2}{8} - \frac{5a^2}{4}}{2\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)} = \frac{-\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \varphi \text{ góc của (SAD) và (SCD) có } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

c) Gọi J là trung điểm SC

$$\Delta SBC \text{ cân tại B} \Rightarrow BJ \perp SC$$

$$\text{Ta có } SM^2 = SA^2 + AM^2 = \frac{5a^2}{4} = MC^2$$

$$\Delta SMC \text{ cân} \Rightarrow MJ \perp SC$$

$$\text{Vậy góc (SBC) và (SMC) là } \widehat{BJM} \text{ hay } \pi - \widehat{BJM}$$

$$CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp SI$$

$$\Delta SIC \perp \Rightarrow SC^2 = SI^2 + IC^2 = \frac{7a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = 2a^2$$

$$\Delta BJC \perp \Rightarrow BJ^2 = BC^2 - JC^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$$

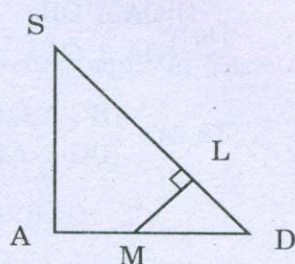
$$\Delta MJC \perp \Rightarrow MJ^2 = MC^2 - JC^2 = \frac{5a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Delta ABM \perp \Rightarrow BM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$\text{Ta có } JB^2 + JM^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} = BM^2$$

$$\Rightarrow \Delta BMJ \perp \text{ tại J}$$

Vậy góc của hai mp(SBC) và (SMC) là 90° . ■



BT19. Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối A 2002

Cho tứ diện O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mp (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA) và (OAB).

Chứng minh : $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{3}$.

Đặt BC = a, AC = b, AB = c, OA = x, OB = y, OC = z.

Do các tam giác AOB, BOA, COA vuông tại O nên :

$$\begin{cases} a^2 = y^2 + z^2 \\ b^2 = x^2 + z^2 \\ c^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < b^2 + c^2 \\ b^2 < c^2 + a^2 \\ c^2 < a^2 + b^2 \end{cases}$$

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác nhọn. Do đó trực tâm H nằm trong $\triangle ABC$. Gọi AM, BK, CN là ba đường cao của $\triangle ABC$.

Do $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp \text{mp (OBC)}$

Ta có : $\begin{cases} BC \perp OA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp \text{mp (OAM)} \Rightarrow BC \perp OM$

Vậy $\widehat{OMA} = \alpha$.

Tương tự : $\widehat{ONC} = \gamma, \widehat{OKB} = \beta$

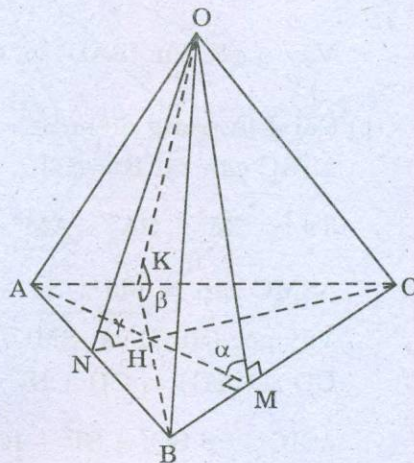
$\triangle AOM$ vuông tại O $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{OM}{AM}$

$\triangle BOC$ vuông $\Rightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$

$$\Rightarrow OM^2 = \frac{y^2 z^2}{y^2 + z^2} \Rightarrow OM = \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

$\triangle AOM$ vuông $\Rightarrow AM^2 = OA^2 + OM^2 = x^2 + \frac{y^2 z^2}{y^2 + z^2} = \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2}{y^2 + z^2}$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{\frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2}{y^2 + z^2}}$$



$$\text{Vậy } \cos\alpha = \frac{OM}{AM} = \frac{yz}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}}$$

$$\text{Tương tự: } \cos\beta = \frac{xz}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}} \text{ và } \cos\gamma = \frac{xy}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có :

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= \frac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}} \\ &\leq \frac{xy + yz + zx}{\frac{1}{\sqrt{3}}(xy + yz + zx)} = \sqrt{3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a. Tính :
 - Khoảng cách từ A đến (SBC).
 - Góc của hai mặt phẳng (SBC) và (SCD), (SBC) và (SAD).
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, AB = a, BC = 2a, SO = h, SO vuông góc mp (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính góc của hai mặt phẳng :
 - (SMN) và (SAB).
 - (SMN) và (SCD).
 - (SAB) và (SCD).
 - (SAB) và (ABCD).
 - (SAB) và (SAC).
- Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của CC'. Tính góc của :
 - IB và A'B'.
 - (IAB) và (ABC).
- Cho hình chóp S.ABC có $\triangle ABC$ vuông với BA = BC = a, SA vuông góc mp (ABC) và SA = a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính góc của hai mặt phẳng :
 - (SAC) và (BCS).
 - (SEF) và (SBC).

5. Cho hình vuông ABCD cạnh a , tâm O , SA vuông góc mp (ABCD). Tính SA theo a sao cho góc giữa hai mp (SBC) và (SCD) bằng 120° .
6. Cho hình vuông ABCD cạnh a , SA vuông góc mp (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$.
Tính góc của hai mặt phẳng :
- a) (SBC) và (ABC). b) (SBD) và (ABD). c) (SAB) và (SCD).
7. Cho tứ diện ABCD có $\triangle ABC$ vuông cân, $AB = AC = a$, $\triangle DBC$ đều. Góc của hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) là 30° .
- a) Tính AD và d(A, (BCD)).
- b) Tính góc của hai mặt phẳng (ABD) và (BDC), (BAD) và (ADC).
8. Cho hình thoi ABCD cạnh a , tâm O , $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, SO vuông góc mp (ABCD) và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc của hai mặt phẳng :
- a) (SAB) và (SAD). b) (SBC) và (ABC).
9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. SA vuông góc mp (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc của hai mặt phẳng :
- a) (SBC) và (ABC). b) (SAB) và (SBC). c) (SBC) và (SCD).
10. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau theo giao tuyến Δ . Lấy hai điểm A, B trên Δ sao cho $AB = a$. Vẽ $\triangle SAB$ đều trong mp (P), hình vuông ABCD trong mp (Q). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi SH là đường cao của $\triangle SAB$.
- a) Tính góc của (SCD) với (P) và (Q).
- b) Gọi O_1 là giao điểm của JC và ID, H_1 là giao điểm của SH và mp (IJCD). Chứng minh SO_1 vuông góc với SA và CD.
- c) Tính góc của mp (IJO₁) với mp (P) và mp (Q).

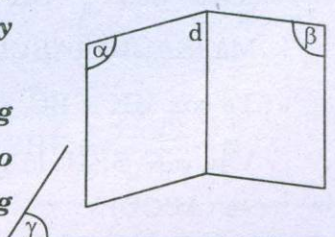
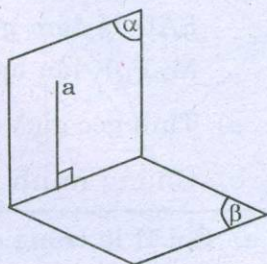
HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

Định nghĩa : Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc của chúng bằng 90° .

Định lí 1 : Nếu mặt phẳng này có chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Định lí 2 : Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau mà có một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng thì đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng kia.

Định lí 3 : Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng kia.



BT1. Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mp (DBC). Gọi DE là đường cao của $\triangle BCD$.

- Chứng minh mp (ADE) vuông góc mp (ABC).
- Từ B vẽ BK vuông góc CD và BF vuông góc AC. Chứng minh mp (BFK) vuông góc mp (ABC).
- Gọi H và N lần lượt là trực tâm $\triangle ABC$ và $\triangle BCD$. Chứng minh NH vuông góc mp (ABC).

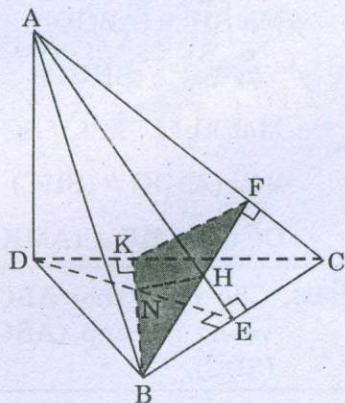
a) Ta có : $AD \perp \text{mp (DBC)} \Rightarrow AD \perp BC$
mà $BC \perp DE$ nên $BC \perp \text{mp (ADE)}$

Ta có $BC \subset \text{mp (ABC)}$
nên $\text{mp (ABC)} \perp \text{mp (ADE)}$.

b) Ta có : $BK \perp CD$ và $AD \perp \text{mp (DBC)} \Rightarrow BK \perp AC$

Mà $BF \perp AC$ nên $AC \perp \text{mp (BFK)}$.

Ta có : $AC \subset \text{mp (ABC)}$
nên $\text{mp (ABC)} \perp \text{mp (BFK)}$.



c) Ta có : $AC \perp mp (BFK) \Rightarrow AC \perp NH$

Ta có : $BC \perp mp (ADE) \Rightarrow BC \perp NH$

Do đó : $NH \perp mp (ABC) \blacksquare$

BT2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, P, K lần lượt là trung điểm SB, DC, CB.

a) Tính góc giữa (SCB) và (ABCD).

b) Chứng minh AM vuông góc BP.

a) Gọi H là trung điểm AD

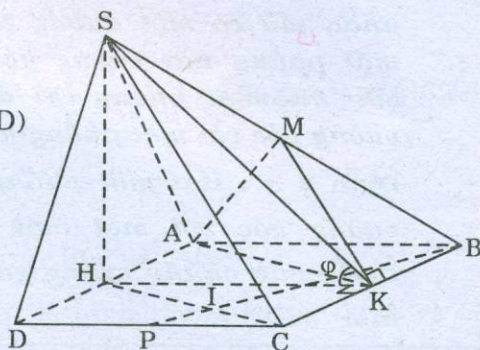
ΔSAD đều $\Rightarrow SH \perp AD$

Mà $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có : $HK \perp BC \Rightarrow SK \perp BC$

Vậy $\varphi = \widehat{SKH}$ là góc giữa (SBC) và (ABCD)

$$\begin{aligned} \Delta SHK \text{ vuông} &\Rightarrow \tan \varphi = \frac{SH}{HK} \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



b) Ta có : $\Delta HDC = \Delta PCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{HCD} = \widehat{PBC}$

ΔPBC vuông tại C $\Rightarrow \widehat{PBC} + \widehat{BPC} = 1v \Rightarrow \widehat{HCD} + \widehat{BPC} = 1v$
 $\Rightarrow HC \perp BP$

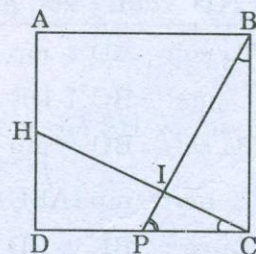
Mà $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BP$

Vậy $BP \perp (SHC)$

Mặt khác : $MK \parallel SC$ và $AK \parallel HC$

Vậy $(AMK) \parallel (SHC)$

Do đó : $BP \perp (AMK) \Rightarrow BP \perp AM \blacksquare$



BT3. Cho hình thoi ABCD cạnh a, $AC = a$. Từ H trung điểm AB, vẽ SH vuông góc mp (ABCD) với $SH = a$. Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC).

Vẽ $HI \perp BC$ thì $BC \perp mp$ (SHI).

Do đó mp (SBC) vuông góc mp (SHI) theo giao tuyến SI.

Vẽ $HK \perp SI$ thì $HK \perp mp$ (SBC).

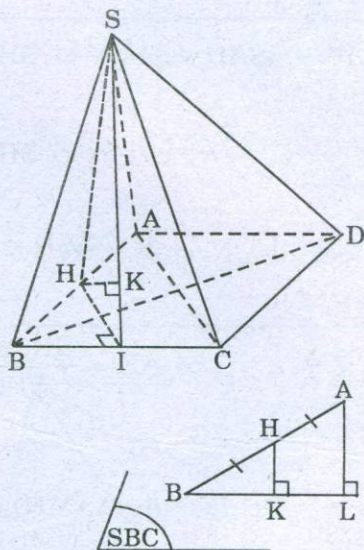
$$\text{Ta có : } HI = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Delta SHI \text{ vuông} \Rightarrow HK = d(H, (SBC))$$

$$\Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HI}{SI} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

Gọi AL là khoảng cách từ A đến mp (SBC).

$$\text{Ta có : } \frac{AL}{HK} = \frac{AH}{AB} = 2 \Rightarrow AL = d(A, (SBC)) = 2HK = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \quad \blacksquare$$



BT4. Tuyển sinh ĐH khối A 2002

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, độ dài các cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, SC. Biết rằng mp (AMN) vuông góc mp (SBC). Tính diện tích tam giác AMN.

Gọi H là tâm của tam giác đều ABC $\Rightarrow HA = BH = HC$.

S.ABC là hình chóp tam giác đều $\Rightarrow SA = SB = SC$.

H và S cách đều ba điểm A, B, C nên SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Do đó $SH \perp mp$ (ABC).

Gọi I là trung điểm BC.

Do mp (AMN) $\perp$ mp (SBC) theo giao tuyến MN.

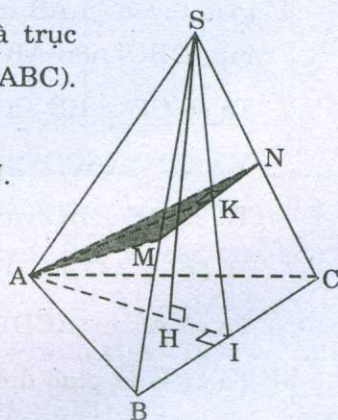
Vẽ $AK \perp MN$ thì $AK \perp mp$ (SBC) $\Rightarrow AK \perp SI$

ΔAMN cân tại A nên K là trung điểm MN.

Do ΔSBC cân nên S, K, I thẳng hàng và K là trung điểm SI.

ΔSAI có $AK \perp SI$ và K là trung điểm SI

$$\text{nên cân tại S} \Rightarrow SA = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



$$\Delta SAH \text{ vuông} \Rightarrow SH^2 = SA^2 - AH^2 = AI^2 - \left(\frac{2}{3}AI\right)^2 = \frac{5}{9}AI^2$$

$$\Rightarrow SH^2 = \frac{5}{9} \times \frac{3a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

$$\text{Ta có : } dt(\Delta SAI) = \frac{1}{2}SH.AI = \frac{1}{2}AK.SI$$

$$\Rightarrow AK = \frac{SH.AI}{SI} = \frac{SH.AI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{15}{36}a^2 + \frac{3a^2}{36}}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{Do đó : } dt(\Delta AMN) = \frac{AK.MN}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \quad \blacksquare$$

BT5. Cho tứ diện ABCD có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc mp (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD , đường cao DK của ΔACD .

- Chứng minh hai mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc mp (ADC).
- Gọi O và H là trực tâm ΔBCD và ΔACD . Chứng minh OH vuông góc mp (ADC).

- a) Hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) có giao tuyến là AB mà cùng vuông góc mp (DBC) nên $AB \perp (DBC)$.

Ta có $CD \perp BE$ và AB nên $CD \perp (ABE)$

Mà $CD \subset (ACD)$ nên $(ADC) \perp (ABE)$

Ta có $DF \perp BC$ và AB nên $DF \perp (ABC)$

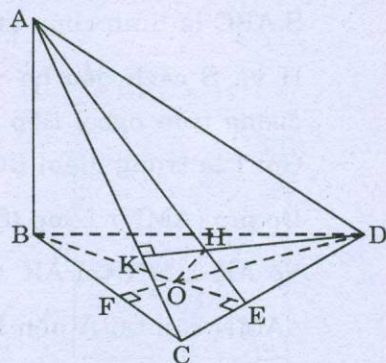
$\Rightarrow DF \perp AC$ mà $DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DFK)$

Ta có $AC \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$.

- b) Ta có O là giao điểm của hai đường cao BE và DF.

H là giao điểm của hai đường cao AE và DK.

OH là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABE) và (DFK) mà hai mặt phẳng này cùng vuông góc mp (ADC) nên $OH \perp (ADC)$.



BT6. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm S sao cho $\triangle SAB$ đều và mp (SAB) vuông góc mp (ABCD).

- Chứng minh mp (SAB) vuông góc với hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Tính góc của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh mp (SHC) và mp (SDI) vuông góc nhau.

a) Gọi H là trung điểm của AB.

$\triangle SAB$ đều nên $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

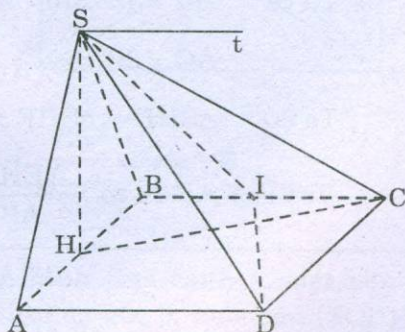
$\Rightarrow SH \perp AD$

Mà $AD \perp AB$ nên $AD \perp (SAB)$.

Do $AD \subset (SAD)$ nên $(SAD) \perp (SAB)$.

Do $BC \parallel AD$ nên $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.



b) Mp (SAD) và (SBC) cùng chứa hai đường thẳng song song AD và BC nên chúng cắt nhau theo giao tuyến $St \parallel BC \parallel AD$. Vậy $St \perp (SAB)$.

Do đó $\widehat{ASB} = 60^\circ$ là góc của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

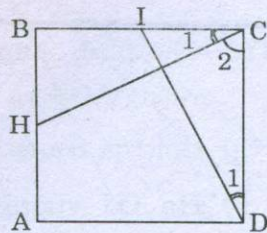
c) Ta có $\triangle BHC = \triangle DIC$ nên $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$

Mà $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ$ nên $\widehat{C}_2 + \widehat{D}_1 = 90^\circ$

Vậy $CH \perp DI$

Mặt khác $DI \perp SH$ nên $DI \perp (SHC)$

Mà $DI \subset (SDI)$ nên $(SDI) \perp (SHC)$.



BT7. Cho hình chóp S.ABC, có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{BAC} = \alpha$ và cạnh $BC = a$. Mặt bên (SBC) vuông góc với đáy (ABC) và các mặt bên (SAB), (SAC) cùng tạo với đáy góc β .

- Kẻ $SH \perp BC$. Chứng minh SH là đường cao của hình chóp đã cho.
- Kẻ $SE \perp AC$, $SF \perp AB$. Chứng minh rằng $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \beta$.
- Tính SH theo a, α và β .

a) Ta có mp $(SBC) \perp$ mp (ABC) và $SH \perp BC$;

$SH \subset mp(SBC)$ nên $SH \perp mp(ABC)$.

Vậy SH là đường cao hình chóp $S.ABC$.

b) Ta có : $SE \perp AC \Rightarrow EH \perp AC$.

Ta có : $SF \perp AB \Rightarrow FH \perp AB$.

Vậy $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \beta$.

c) Ta có : $AB = BC.\sin\alpha = a\sin\alpha$

$$AC = BC\cos\alpha = a\cos\alpha$$

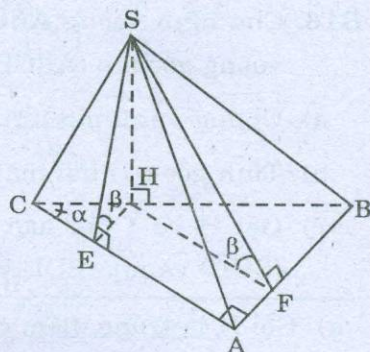
Ta có : $\triangle SHE = \triangle SHF \Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ là hình vuông.

$$\text{Vì } EH \parallel AB \text{ ta có : } \frac{EH}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{EH}{AB} = \frac{CA - EA}{CA} = \frac{CA - EH}{CA}$$

$$\Rightarrow EH.CA = AB.CA - AB.EH$$

$$\text{Suy ra : } EH = \frac{AB.AC}{AB + AC} = \frac{a\sin\alpha.a\cos\alpha}{a\sin\alpha + a\cos\alpha} = \frac{a\sin 2\alpha}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)}$$

$$\text{Trong } \triangle SHE \text{ vuông tại H : } SH = EH.\tan\beta = \frac{a\sin 2\alpha.\tan\beta}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)} \quad \blacksquare$$



BT8. Cho hình lăng trụ đứng, chiều cao có độ dài h , đáy là hai tam giác vuông AOB và $A'O'B'$, trong đó $OA = OB = a$.

a) Gọi I là trung điểm AB , chứng minh OI vuông góc AB' .

b) Hạ OJ vuông góc $A'B$. Chứng minh rằng $A'B$ vuông góc $mp(OIJ)$ và $\triangle OIJ$ là tam giác vuông.

c) Tính $\sin$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'B)$ và $(OA'B)$ theo a và h .

a) Ta có : $BB' \perp mp(OAB)$ mà $BB' \subset mp(ABB'A')$

nên $mp(OAB) \perp mp(ABB'A')$ theo giao tuyến AB .

$$\triangle OAB \text{ vuông cân} \Rightarrow OI \perp AB \Rightarrow OI \perp mp(ABB'A') \Rightarrow OI \perp B'A.$$

b) $OI \perp mp(ABB'A') \Rightarrow OI \perp A'B$, mặt khác $OJ \perp A'B \Rightarrow A'B \perp mp(OIJ)$

Vì $OI \perp (ABB'A') \Rightarrow OI \perp IJ \Rightarrow \triangle OIJ$ vuông tại I .

c) Ta có $A'B \perp mp(OIJ)$ nên $\widehat{OJI}$ là góc của hai mặt phẳng $(AB'B)$ và $(OA'B)$.

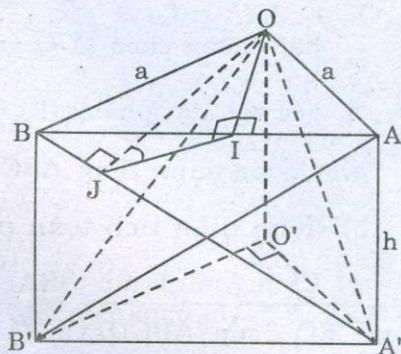
$$\text{Ta có : } OA' = \sqrt{a^2 + h^2}; A'B = \sqrt{2a^2 + h^2}$$

$$\triangle OBA' \text{ vuông} \Rightarrow OA' \cdot OB = OJ \cdot A'B$$

$$\Rightarrow OJ = \frac{a\sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$$

$$\triangle OIJ \text{ vuông} \Rightarrow \sin \widehat{OJI} = \frac{OI}{OJ}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{a\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{\sqrt{2a^2 + 2h^2}} \quad \blacksquare$$



BT9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc đáy và tạo với nhau góc β , mặt bên (SCD) và (SBC) cùng tạo với đáy góc α . Tính diện tích xung quanh hình chóp theo a, α, β .

Ta có : $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$

và $mp(SAD) \perp mp(ABCD)$

Mà hai mp (SAB) và (SAD) có giao tuyến SA nên $SA \perp mp(ABCD)$.

Vậy góc giữa hai mặt bên (SAB) và (SAD) là $\widehat{BAD} = \beta$.

Từ S hạ $SK \perp BC$ và $SH \perp CD$

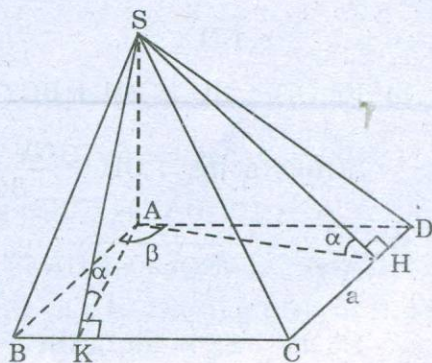
$$\Rightarrow BC \perp AK \text{ và } CD \perp AH.$$

Vậy $\widehat{SKA} = \widehat{SHA} = \alpha$.

$$\text{Ta có : } 2dt(\triangle SAB) = SA \cdot AB = (AK \cdot \tan \alpha) AB = AB \sin(\pi - \beta) \tan \alpha \cdot BA = a^2 \sin \beta \cdot \tan \alpha$$

$$\text{và } 2dt(\triangle SBC) = SK \cdot BC = \frac{AK}{\cos \alpha} BC = \frac{a^2 \sin \beta}{\cos \alpha}$$

$$\text{Vậy : } S_{xq} = \frac{a^2 \sin \beta}{\cos \alpha} (1 + \sin \alpha) \quad \blacksquare$$



BT10. Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi ABCD cạnh bằng a, giao điểm hai đường chéo là O và $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Từ O dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và trên đó lấy điểm S sao cho $SB = SD = a$.

- Chứng minh rằng $\widehat{ASC}$ là góc vuông và $SC \perp BD$.
- Tính diện tích toàn phần của hình chóp S.ABCD theo a.
- Chứng minh mp (SBA) vuông góc mp (DSA).

a) $SO \perp mp(ABCD)$ và $OA = OC$; $OB = OD \Rightarrow SA = SC$; $SB = SD$

$$\text{Trong } \triangle SOB \text{ vuông : } SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\text{Trong } \triangle OBC \text{ vuông : } OC^2 = \frac{2a^2}{3}, \text{ vậy } SO = OA = OC.$$

Do đó $\widehat{ASC}$ vuông.

Ta có : $BD \perp AC$ và $BD \perp SO$

$$\Rightarrow BD \perp mp(SAC)$$

$$\Rightarrow BD \perp SC.$$

b) Kẻ $OH \perp BC \Rightarrow SH \perp BC$

$$\triangle OBC \text{ vuông} \Rightarrow OH = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{và } SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó : } S_{tp} = 4dt(\triangle SBC) + dt(ABCD) = 2SH \cdot BC + 2OA \cdot OB$$

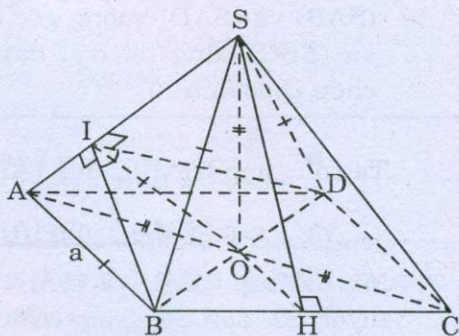
$$= \frac{4a^2\sqrt{2}}{3} + \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^2\sqrt{2}}{3} + \frac{2a^2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}a^2.$$

c) Kẻ $BI \perp SA$ thì I là trung điểm của SA vì $SB = BA$.

Tương tự $DI \perp SA$ (vì $\triangle SDA$ cân).

Vậy $\widehat{BID}$ là góc phẳng của nhị diện (BSA, DSA).

Ta có $OI \perp SA$ ($\triangle SOA$ vuông cân) nên



$$OI = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad DB = 2OB = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Do $OI = \frac{1}{2}BD$ nên $\triangle BID$ vuông tại I.

Vậy mp (SBA) $\perp$ mp (DSA) ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc nhau theo giao tuyến Δ . Trên Δ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Lấy C trên (α) , D trên (β) sao cho AC vuông góc BD, $AC = 6$, $BD = 24$. Tính CD.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $\triangle SAB$ cân tại S, mp (SAB) vuông góc mp (ABCD), SC tạo với đáy góc α .

a) Tính khoảng cách từ S đến mp (ABCD).

b) Tính diện tích mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng trung trực của BC.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$,

$$SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

a) Tính SC và khoảng cách từ S đến mp (ABCD).

b) Chứng minh mp (SAC) vuông góc mp (ABCD) và SB vuông góc BC.

c) Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD).

4. Cho tứ diện ABCD có $\triangle ABC$ đều cạnh a, AD vuông góc BC và $AD = a$. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của BC và AH. Khoảng cách từ D đến BC là a. Chứng minh :

a) Mp (ABC) vuông góc mp (ADH).

b) DI vuông góc mp (ABC).

5. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng của

A qua I. Vẽ SD vuông góc mp (ABCD) và $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

a) Chứng minh mp (SBC) vuông góc mp (SAD), mp (SAB) vuông góc mp (SAC).

b) Tính khoảng cách từ I đến SA.

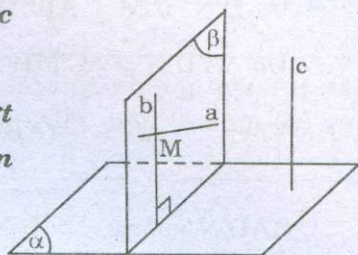
6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc mp $(ABCD)$. Lấy M trên BC sao cho $BM = \frac{a}{2}$, lấy N trên DC sao cho $DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh mp (SAM) vuông góc mp (SMN) .
7. Cho ΔABC vuông tại A . Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc mp (ABC) .
- Chứng minh mp (ABB') vuông góc mp (ACC') .
 - Gọi AH , AK lần lượt là đường cao của ΔABC và $\Delta AB'C'$. Chứng minh mp (AHK) vuông góc hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(AB'C')$.
8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi I , J lần lượt là hình chiếu của S lên AB và CD .
- Chứng minh mp (SIJ) vuông góc mp $(ABCD)$.
 - Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng tạo với mp $(ABCD)$ góc α , SO tạo với mp $(ABCD)$ góc β . Chứng minh mp (SAC) vuông góc mp $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ S đến mp $(ABCD)$.
9. Trong mp (P) cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . SA cố định vuông góc mp (P) tại A . Lấy hai điểm M , N di động trên BC , CD với $BM = x$, $DN = y$.
- Tìm mối liên hệ giữa x , y để mp (SAM) vuông góc mp (SNM) .
 - Tìm mối liên hệ giữa x , y để góc của hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) bằng 45° .
 - Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích ΔAMN .

Chủ đề 21

XÁC ĐỊNH MẶT CẮT CỦA ĐA DIỆN VÀ MP (α) CHỨA ĐƯỜNG THẲNG a CHO TRƯỚC VÀ VUÔNG GÓC MP (α) CHO TRƯỚC

Phương pháp

- Từ một điểm M trên a , dựng b vuông góc với mp (α) thì mp (β) = mp (a, b).
- Khi đã xác định được mp (β) ta lần lượt xác định các đoạn giao tuyến với đa diện từ đó tìm được thiết diện.



Chú ý : Khi đã có $c \perp (\alpha)$ thì (β) chứa c hay song song c .

BT1. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (P) đi qua AB và vuông góc mp (SCD) lần lượt cắt SC và SD tại C' và D' . Xác định hình tính và tính diện tích tứ giác $ABC'D'$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD .

Ta có : $IJ \parallel BC \Rightarrow IJ \perp CD$

mà $CD \perp SO$ (do $SO \perp$ mp $(ABCD)$)

nên $CD \perp$ mp (SIJ) ,

Từ I vẽ $IK \perp SJ$ thì $IK \perp$ mp (SCD)

(do mp $(SIJ) \perp$ mp (SCD))

Do đó (P) là mp (AB, IK) .

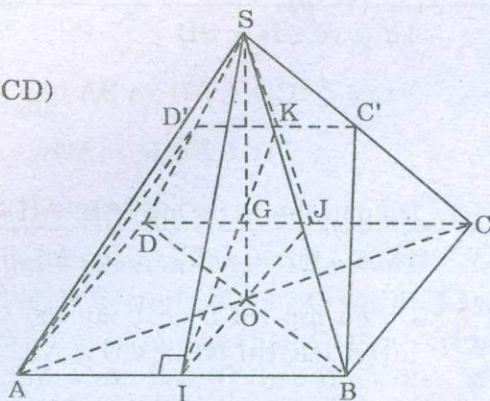
Ta có :

$$\Delta SIA \text{ vuông} \Rightarrow SI^2 = -AI^2 + SA^2$$

$$\Rightarrow SI^2 = -a^2 + 5a^2 = 4a^2$$

Do đó ΔSIJ đều $\Rightarrow K$ là trung điểm SJ .

Mp (P) chứa $AB \parallel CD$, vậy cắt mp (SCD) theo giao tuyến $C'D'$ qua K và song song CD .



Mặt cắt là hình thang cân $ABC'D'$.

$$\Delta SBC \text{ có } BC' \text{ là trung tuyến} \Rightarrow SB^2 + BC^2 = 2BC'^2 + \frac{SC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 5a^2 + 4a^2 = 2BC'^2 + \frac{5a^2}{2} \Rightarrow BC' = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Ta có $C'D' = \frac{CD}{2} = a$

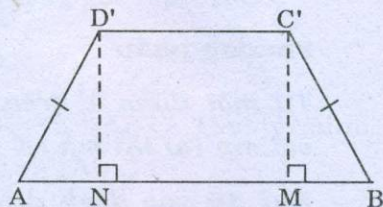
Vẽ $D'N, C'M \perp AB$

Do $\Delta A'D'N = \Delta C'MB \Rightarrow AN = MB$

Vậy $AN = \frac{1}{2}(AB - C'D') = \frac{a}{2}$

$$\Delta AD'N \text{ vuông} \Rightarrow D'N^2 = \frac{13a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 3a^2$$

$$\text{Do đó: } dt(AD'C'B) = \frac{D'N}{2}(C'D' + AB) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 3a = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \quad \blacksquare$$



BT2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , AS vuông góc mp $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc mp (SCD) . Mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện đó.

Từ A vẽ $AH \perp SD$

Ta có: $CD \perp AD$ và SA nên $CD \perp mp(SAD)$

$$\Rightarrow CD \perp AH \quad \text{Vậy } AH \perp mp(SCD).$$

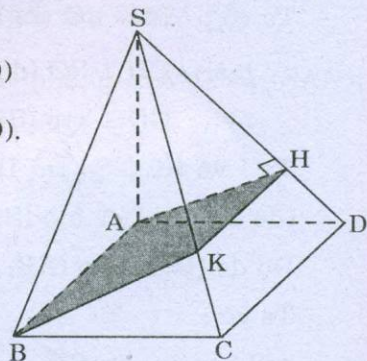
Do đó: $mp(\alpha) \equiv mp(AB, AH)$

Ta có: $CD \parallel AB$ nên $CD \parallel mp(\alpha)$.

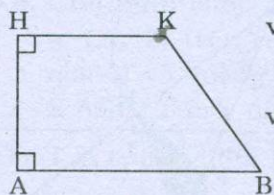
Do đó $mp(SCD)$ cắt $mp(\alpha)$ theo giao tuyến HK thì $HK \parallel CD \parallel AB$.

Do $AH \perp mp(SCD)$ nên $AH \perp HK$.

Vậy mặt cắt là hình thang $AHKB$ vuông tại H và A .



• ΔSAD vuông $\Rightarrow SD^2 = SA^2 + AD^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$



$$\text{và } AH = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{a\sqrt{3}(a)}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{và } SA^2 = HS \cdot SD \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SD} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Ta có } HK \parallel CD \Rightarrow \frac{HK}{CD} = \frac{SH}{SD} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot CD}{SD} = \frac{a \left(\frac{3a}{2} \right)}{2a} = \frac{3a}{4}$$

$$\text{Do đó : } dt(ABKH) = \frac{1}{2}AH(AB + HK) = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \left(a + \frac{3a}{4} \right) = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16} \blacksquare$$

BT3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABC. Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc mp (SCD). Xác định hình tính của thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp S.ABCD.

Gọi E, F là trung điểm AB, CD.

Vẽ $EI \perp SF$ (1)

Ta có $SC = SD \Rightarrow SF \perp CD$

Mà $EF \perp CD$ nên $CD \perp (SEF)$

Do đó $CD \perp EI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EI \perp (SCD)$

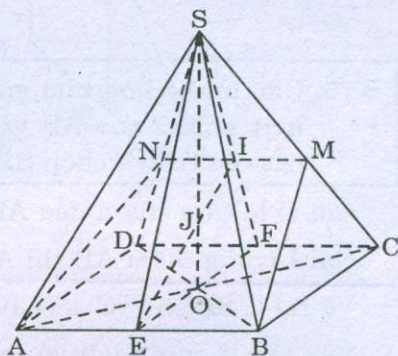
Do đó (P) là mặt phẳng chứa AB và EI

Do $AB \parallel (SCD) \Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (SCD) là đường thẳng qua I và song song CD, đường này cắt SD, SC tại N, M.

Do $MN \parallel CD$ nên NMBA là hình thang.

Mặt khác do $\triangle NDA = \triangle MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow NA = MB$

$\Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{MCB} \Rightarrow NMBA$ là hình thang cân.



BT4. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp mp(ABC)$. Gọi E, F là trung điểm SC và SB. Lấy M trên cạnh AB với $AM = x$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa EM và vuông góc mp (SAB). Mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABC theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện theo a, x.

• Ta có : $BC \perp BA$ và $SA \perp mp(ABC)$ nên $BC \perp mp(SAB)$.

Mà $EF \parallel BC \Rightarrow EF \perp mp(SAB)$.

Vậy (α) là mp (EFM)

Do đó $EF \parallel BC$ nên $EF \parallel mp(ABC)$.

Vậy mp (α) cắt mp (ABC) theo giao tuyến $MN \parallel BC \parallel EF$.

Do $BC \perp$ mp (SAB) nên $BC \perp MF$.

Vậy $MN \perp MF$ nên mặt cắt MNEF là hình thang vuông tại M và F.

- ΔAMN vuông cân tại M $\Rightarrow MN = AM = x$.

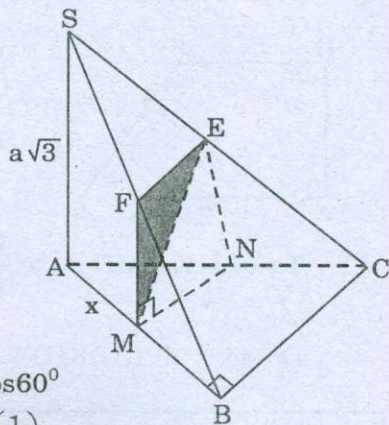
$$\Delta SAB \text{ vuông} \Rightarrow \tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$$

$$\Delta BFM \Rightarrow FM^2 = BF^2 + MB^2 - 2MB \cdot BF \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow FM^2 = a^2 + (a-x)^2 - 2a(a-x) \left(\frac{1}{2} \right) = a^2 - ax + x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } dt(EFMN) &= \frac{MF}{2}(EF + MN) = \frac{\sqrt{a^2 - ax + x^2}}{2} \left(\frac{a}{2} + x \right) \\ &= \frac{1}{4}(a + 2x)\sqrt{a^2 - ax + x^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



BT5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy a chiều cao h. Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc SC. Tính theo a và h diện tích mặt cắt của (P) và chóp S.ABC.

Gọi O là tâm của Δ đều ABC thì $SO \perp (ABC)$ và $SO = h$

Gọi I trung điểm AB thì $AB \perp (SIC) \Rightarrow AB \perp SC$

Vẽ $AJ \perp SC$ thì $SC \perp (AJC)$

Vậy (P) là mp(AJC) và mặt cắt của (P) và chóp S.ABC là ΔABJ

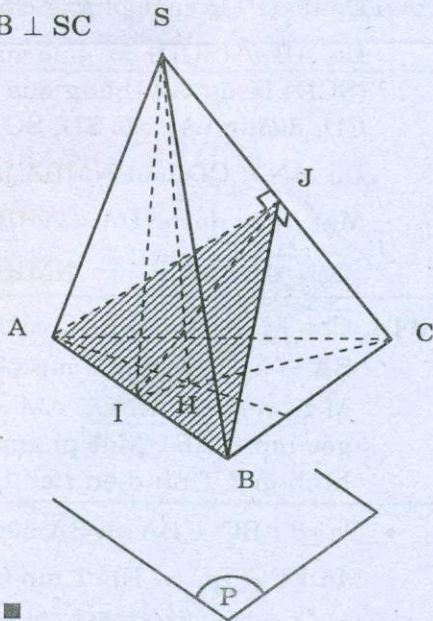
Do $SC \perp (ABJ) \Rightarrow SC \perp IJ$

$$\text{Vậy } dt(\Delta SIC) = \frac{1}{2} SH \cdot CI = \frac{1}{2} IJ \cdot SC$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{SH \cdot CI}{SC} = \frac{SH \cdot CI}{\sqrt{SH^2 + HC^2}}$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{h \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2}} = \frac{3ah}{\sqrt{3h^2 + a^2}}$$

$$\text{Do đó: } dt(\Delta ABJ) = \frac{1}{2} IJ \cdot AB = \frac{3a^2h}{\sqrt{3h^2 + a^2}} \quad \blacksquare$$



BT6. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc đáy, $SA = a$. $\triangle ABC$ đều cạnh a. Lấy M trên cạnh AC với $CM = x$ ($0 < x < a$). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc AC. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (P) và chóp S.ABC. Tìm x để diện tích này lớn nhất.

Gọi I là trung điểm AC thì $BI \perp AC$

• Trường hợp 1: Nếu M trên khoảng AI ($\frac{a}{2} < x < a$)

Do $BI \perp AC$ và $(P) \perp AC$ nên $(P) \parallel BI$

Vậy $(P) \cap (ABC) = MN \parallel BI$ ($N \in AB$)

Do $SA \perp AC$ và $(P) \perp AC$ nên $(P) \parallel SA$

Vậy $(P) \cap (SAC) = MK \parallel SA$ ($K \in SC$)

Và $(P) \cap (SAB) = HN \parallel SA$ ($H \in SB$)

Do đó: mặt cắt là hình thang vuông MNHK

$$\text{Ta có: } MN \parallel BI \Rightarrow \frac{MN}{BI} = \frac{AM}{AI} = \frac{AN}{AB}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{AM \cdot BI}{AI} = \frac{(a-x) \frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = (a-x)\sqrt{3}$$

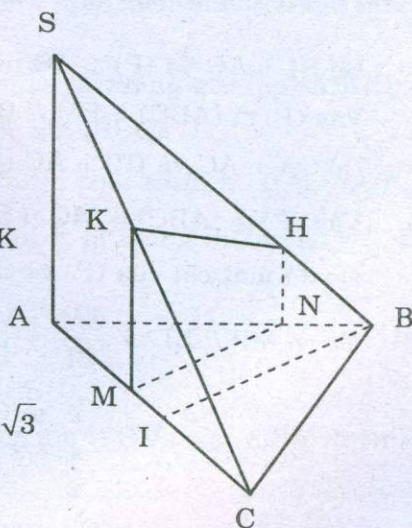
$$\text{Và } AN = \frac{AM \cdot AB}{AI} = \frac{(a-x)a}{2} = 2(a-x)$$

$$\triangle HNB \perp \text{cân} \Rightarrow HN = NB = a - (2a - 2x) \\ = 2x - a$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } dt(MN HK) &= \frac{MN}{2} (MK + HN) \\ &= \frac{(a-x)\sqrt{3}}{2} (x + 2x - a) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (a-x)(3x-a) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (-3x^2 + 4ax - a^2) = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} (-6x + 4a)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$$



x	$\frac{a}{2}$	$\frac{2a}{3}$	a
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			

Do đó $dt(MNKH)_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ khi $x = \frac{2a}{3}$.

- Trường hợp 2: Khi $M \in [IC]$ thì $0 < x \leq \frac{a}{2}$

Do $BI \perp AC$ và $(P) \perp AC$ nên $(P) \parallel BI$

Vậy $(P) \cap (ABC) = PM \parallel BI$ ($P \in BC$)

Do $SA \perp AC$ và $(P) \perp AC$ nên $(P) \parallel SA$

Vậy $(P) \cap (ABC) = MQ \parallel SA$

Do đó mặt cắt của (P) và $SABC$ là $\Delta \perp MPQ$

Ta có $MP \parallel BI \Rightarrow \frac{CM}{CI} = \frac{MP}{BI}$

$$\Rightarrow MP = \frac{CM}{CI} \cdot BI = \frac{x}{\frac{a}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$$

$\Delta CMQ \perp \text{cân} \Rightarrow MQ = CM = x$

Vậy $dt(\Delta MPQ) = \frac{1}{2} MQ \cdot MP = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = g(x)$

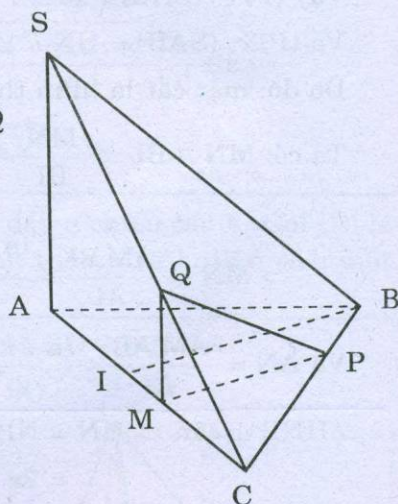
Ta có $g'(x) = x\sqrt{3} > 0$ trên $\left(0, \frac{a}{2}\right]$

x	0	$\frac{a}{2}$
$g'(x)$		+
$g(x)$		$\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Vậy $dt(\Delta MPQ)_{\max} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{a}{2}$

Kết luận: Diện tích mặt cắt của (P) và $SABC$ đạt giá trị lớn nhất $= \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

khi $x = \frac{2a}{3}$. ■



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , AA' vuông góc mp (ABC) và $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, $A'C'$. Xác định và tính diện tích mặt cắt của lăng trụ và mặt phẳng qua MN vuông góc mp (BCC'B').
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , SA vuông góc mp (ABCD) và $SA = a$. Xác định và tính diện tích mặt cắt của hình chóp và mặt phẳng :
 - a) (α) qua tâm O của đáy, trung điểm M của SD và vuông góc mp (ABCD).
 - b) (β) qua A, trung điểm của CD và vuông góc mp (SBC).
3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, SC vuông góc mp (ABCD) và $SC = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE.
 - a) Chứng minh mp (SCF) vuông góc mp (SBC).
 - b) Tính các khoảng cách từ C và A đến mp (SBC).
 - c) Gọi (α) là mặt phẳng qua AD và vuông góc mp (SBC). Xác định và tính diện tích mặt cắt của (α) và hình chóp.

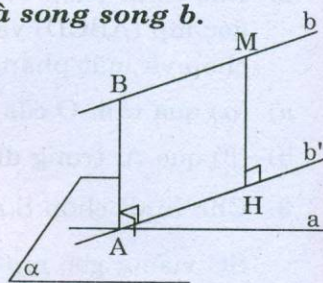
DỰNG ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG TÍNH KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐƯỜNG CHÉO NHAU

• Phương pháp 1

- *Dựng mặt phẳng (α) chứa đường thẳng a và song song b .*
- *Lấy điểm M trên b , dựng $MH \perp mp$ (α).*
- *Trên mp (α) dựng b' qua H và $b' \parallel b$, b' cắt a tại A .*
- *Từ A dựng đường thẳng song song MH cắt b tại B .*

AB là đường vuông góc chung cần dựng.

Ta có : $AB = MH = d(M, \alpha) = d(a, b)$



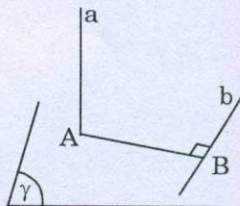
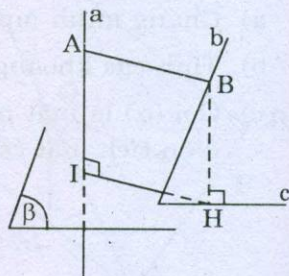
• Phương pháp 2

- *Dựng mp (β) vuông góc a tại I .*
- *Dựng đường thẳng c hình chiếu vuông góc của b lên mp (β).*
- *Trong mp (β) dựng $IH \perp c$ ($H \in c$).*
- *Từ H dựng đường thẳng song song với a , đường này cắt b tại B .*
- *Từ B dựng đường thẳng song song với IH cắt a tại A .*

AB là đường vuông góc chung cần dựng.

• Chú ý : Nếu a vuông góc b

- *Dựng mp (γ) chứa b và vuông góc a tại A .*
- *Từ A dựng $AB \perp b$ tại B thì AB là đường vuông góc chung.*



BT1. Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối D 2002

Cho tứ diện đều ABCD cạnh $a = 6\sqrt{2}\text{cm}$. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

- Gọi I và J lần lượt là trung điểm AD và BC.

Các mặt của tứ diện ABCD là các tam giác đều nên $CI = IB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle IBC$ cân tại $I \Rightarrow IJ \perp AD$.

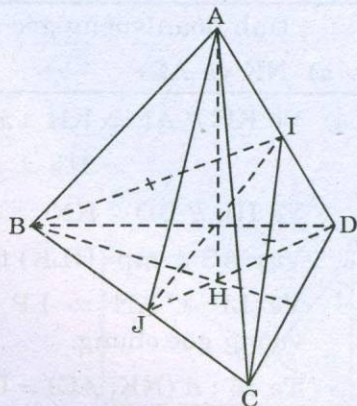
Tương tự: $\triangle JAD$ cân tại $J \Rightarrow JI \perp BC$

Vậy IJ là đoạn vuông góc chung của AD và BC .

- $\triangle BIJ$ vuông tại J

$$\Rightarrow IJ^2 = IB^2 - BJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2} = (6\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\text{cm} \blacksquare$$



BT2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, $CD = b$, các cạnh còn lại đều bằng a . Gọi E và F lần lượt là trung điểm AB và CD .

- Chứng minh $AB \perp CD$ và EF là đường vuông góc chung của AB và CD . Tính EF theo a , b , x .
- Tìm x để hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc.

- Do $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ cân nên $AF \perp CD$, $BF \perp CD$.

Vậy $CD \perp mp(FAB) \Rightarrow CD \perp AB$

- $CD \perp mp(FAB) \Rightarrow CD \perp EF$ (1)

Tương tự, $AB \perp mp(ECD)$ nên $AB \perp EF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EF$ là đường vuông góc chung của AB và CD .

$$EF^2 = EC^2 - \frac{b^2}{4} = a^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{b^2}{4}$$

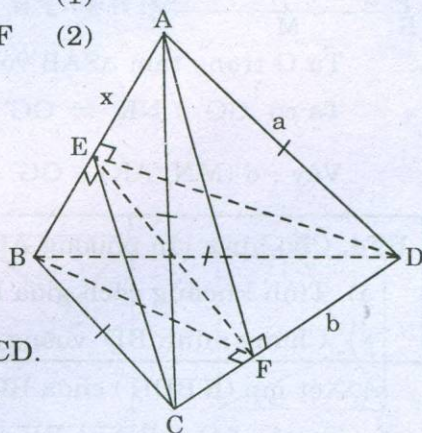
$$\Rightarrow EF = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{b^2}{4}}$$

- Ta có $\widehat{AFB}$ là góc phẳng nhị diện cạnh CD .

Vậy $mp(ACD) \perp mp(BCD) \Leftrightarrow \widehat{AFB} = 1v$

$$\triangle BCF \Rightarrow BF^2 = BC^2 - CF^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\text{Do đó } \widehat{AFB} = 1v \Leftrightarrow AB^2 = FB^2 + FA^2 = 2FB^2 \Leftrightarrow x^2 = 2\left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right) \blacksquare$$



BT3. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là trung điểm AB . Vẽ $SI \perp (ABCD)$ với

$SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M , N , K lần lượt là trung điểm BC , SD , SB . Dựng và

tính đoạn vuông góc chung của :

a) NK và AC

b) MN và AK.

a) Vẽ $KH \parallel AI \Rightarrow KH \perp mp(ABCD)$

$$\Rightarrow HK \perp AC$$

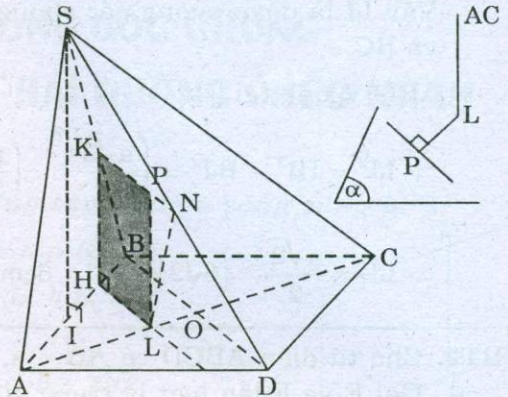
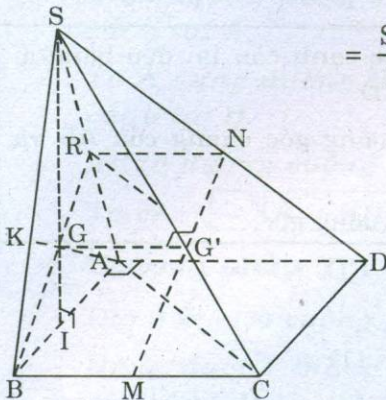
Vẽ $HL \parallel BD \parallel KN \Rightarrow AC \perp HL$

Vậy $AC \perp mp(HLK)$ tại L.

Vẽ $LP \perp KN \Rightarrow LP$ là đường vuông góc chung.

Ta có : $d(NK, AC) = LP = HK$

$$= \frac{SI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



b) Gọi R là trung điểm SA $\Rightarrow RNMB$ là hình bình hành $\Rightarrow BR \parallel MN$.

Vậy mp(SAB) chứa AK và song song MN.

Mặt khác : $AD \perp AB, SI$

$$\Rightarrow AD \perp mp(SAB)$$

$$\Rightarrow NR \perp mp(SAB)$$

Từ G trọng tâm ΔSAB vẽ $GG' \parallel NR$ cắt MN tại G'.

Ta có $GG' \parallel NR \Rightarrow GG' \perp AK, MN$

$$\text{Vậy : } d(MN, AK) = GG' = MB = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \quad \blacksquare$$

BT4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD' .

b) Chứng minh BD' vuông góc mp($DA'C'$).

a) Xét mp($B'BDD'$) chứa BD' và song song AA' .

Ta có : $AO \perp BD$ và BB' nên $AO \perp mp(BB'D'D)$

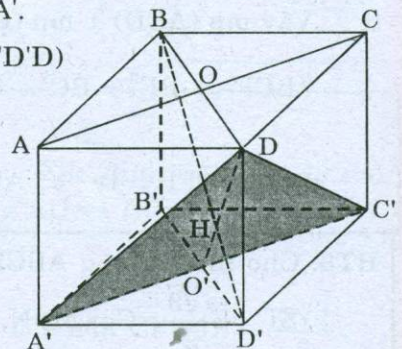
$$\text{Vậy : } d(AA', BD') = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

(xem phương pháp 1).

b) Ta có : $A'C' \parallel AO$ mà $AO \perp mp(BB'D'D)$

nên $A'C' \perp mp(BB'D'D)$

$$\Rightarrow A'C' \perp BD' \quad (1)$$



Mặt khác: $\triangle BB'D'$ vuông $\Rightarrow \tan \widehat{D}_1' = \frac{BB'}{B'D'} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

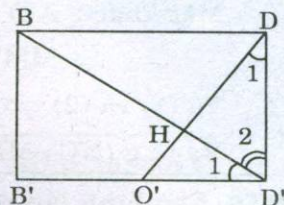
$\triangle O'DD'$ vuông $\Rightarrow \tan \widehat{D}_1 = \frac{O'D'}{DD'} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Do đó: $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_1'$

Mà: $\widehat{D}_1' + \widehat{D}_2' = 1v \Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 1v$

$\Rightarrow \triangle HDD'$ vuông tại H

$\Rightarrow BD' \perp DO'$ (2)



Từ (1) và (2) $\Rightarrow BD' \perp mp (DA'C')$ ■

BT5. Tuyển sinh ĐH khối B 2002

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

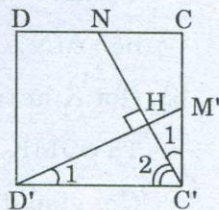
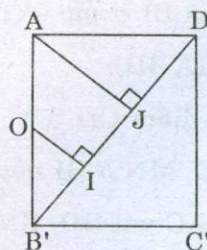
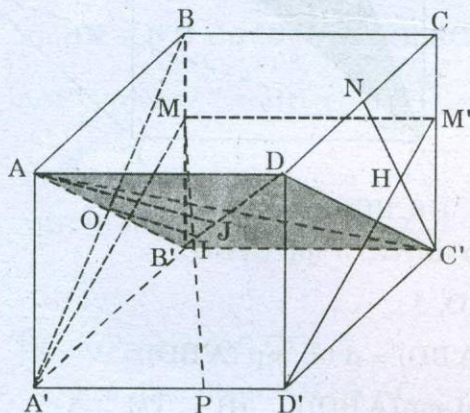
- a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và DB' .
b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm $BB', CD, A'D'$. Tính góc của hai đường thẳng MP và $C'N$.

a) Ta có: $A'B \perp AB'$ và $AD \Rightarrow A'B \perp mp (ADC'B') \Rightarrow A'B \perp DB'$

Trong $mp (ADC'B')$ vẽ $OI \perp DB'$ thì $OI \perp BA'$ và $B'D$

nên $OI = d(BA', DB')$ (xem phương pháp 2)

Vẽ $AJ \perp DB'$



$\triangle$ vuông $ADB' \Rightarrow AJ = \frac{AD \cdot AB'}{DB'} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Do đó: $d(BA', DB') = OI = \frac{AJ}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

- b) Gọi M' là trung điểm CC' , $D'M'$ cắt NC' tại H .

$$\text{Ta có : } \triangle NCC' = \triangle M'C'D' \Rightarrow \widehat{C'_1} = \widehat{D'_1}$$

$$\text{Mà } \widehat{C'_1} + \widehat{C'_2} = 1v \text{ nên } \widehat{D'_1} + \widehat{C'_2} = 1v$$

$$\text{Vậy } \triangle H'D'C' \text{ vuông tại } H \Rightarrow NC' \perp D'M' \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác : } A'D' \perp mp(CDC'D') \text{ mà } MM' \parallel A'D'$$

$$\Rightarrow MM' \perp mp(CDD'C') \Rightarrow MM' \perp NC' \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow NC' \perp mp(MM'D'A') \Rightarrow NC' \perp MP$$

$$\text{Vậy : } g(NC', MP) = 90^\circ \blacksquare$$

BT6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N là trung điểm BC và DD' .

- a) Chứng minh MN song song mặt phẳng $(A'BD)$.
b) Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD và MN .

- a) Gọi I là giao điểm AD' và $A'D$.

$$\text{Ta có : } \vec{NI} = \frac{1}{2} \vec{D'A'}$$

$$\text{và } \vec{MB} = \frac{1}{2} \vec{CB}$$

$$\text{mà } \vec{D'A'} = \vec{CB} \text{ nên } \vec{NI} = \vec{MB}$$

$$\Rightarrow MNIB \text{ là hình bình hành}$$

$$\Rightarrow MN \parallel BI \text{ mà } BI \subset mp(A'BD)$$

$$\text{nên } MN \parallel mp(A'BD).$$

- b) Gọi K là trung điểm CD .

$$\text{Ta có } MK \parallel BD, MN \parallel BI \text{ nên } mp(MNK) \parallel mp(A'BD).$$

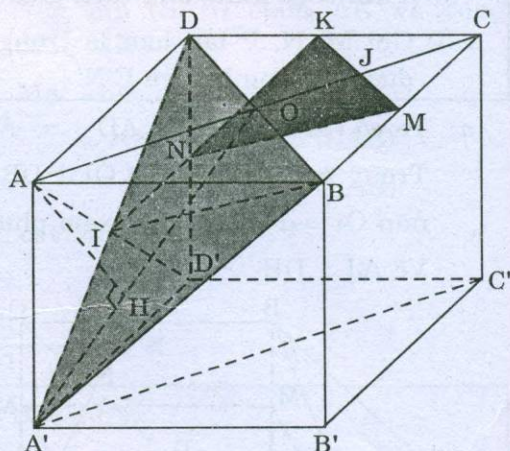
$$\text{Gọi giao điểm } AC \text{ với } BD, KM \text{ là } O, J.$$

$$\text{Ta có : } d(BD, MN) = d(MNK, A'BD) = d(J, mp(A'BD))$$

$$AJ \text{ cắt } mp(A'BD) \text{ tại } O \text{ nên } \frac{d(J, mp(A'BD))}{d(A, mp(A'BD))} = \frac{JH'}{AH} = \frac{OJ}{OA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó : } d(BD, MN) = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}d(A, (A'BD))$$

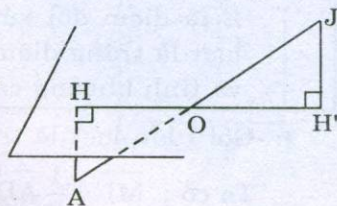
$$\text{Ta có : } BD \perp AC \text{ và } AA' \text{ nên } BD \perp mp(AC, A'C')$$



Vẽ $AH \perp OA'$ thì $BD \perp AH$ (do $AH \subset mp(AC, A'C')$).

Vậy $AH \perp mp(A'BD)$

$$\triangle AA'O \text{ vuông} \Rightarrow AH = \frac{AO \cdot AA'}{OA'} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



$$\text{Do đó: } d(BD, MN) = \frac{1}{2}AH = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad \blacksquare$$

BT7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = a$.

a) Tính khoảng cách của hai đường thẳng AD' và $B'C$.

b) Gọi M là điểm chia trong đoạn AD với $\frac{AM}{MD} = 3$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$.

a) Ta có: $B'C \parallel AD'$

Vậy $mp(AA', DD')$ là mặt phẳng chứa AD' và song song $B'C$.

Do đó: $d(AD', B'C) = d(B'C, (AA'D'D))$
 $= B'A' = a$.

b) Vẽ $BH \perp AC$ thì $AC \perp mp(BB'H)$.

Do đó: $mp(AB'C) \perp mp(BB'H)$.

Vẽ $BK \perp B'H$ thì $BK \perp mp(AB'C)$

$$\triangle ABC \text{ vuông} \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{a \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

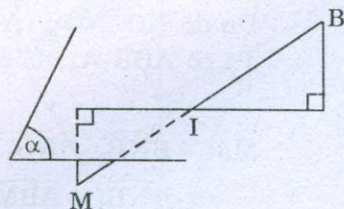
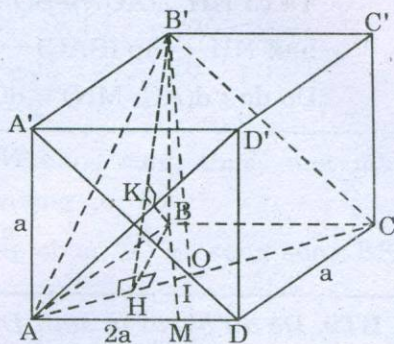
$$\triangle BB'H \text{ vuông} \Rightarrow BK = \frac{BB' \cdot BH}{B'H} = \frac{a \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}}} = \frac{2}{3}a$$

Đặt $(\alpha) = mp(AB'C)$

Gọi I là giao điểm BM và AC .

$$\text{Ta có: } \frac{d(M, \alpha)}{d(B, \alpha)} = \frac{MI}{BI} = \frac{AM}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow d(M, \alpha) = \frac{3}{4}d(B, \alpha) = \frac{3}{4}BK = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{a}{2} \quad \blacksquare$$



BT8. Tuyển sinh ĐH khối B 2007

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

- Gọi I lần lượt là trung điểm của SA .

Ta có : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NC}$ nên $MICN$ là hình bình hành.

Do đó : $MN \parallel IC$ (1)

Mặt khác : $BD \perp AC$ và SO nên $BD \perp mp(SAC) \Rightarrow BD \perp IC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BD \perp MN$.

- $mp(SAC)$ chứa AC và song song MN .

Vậy $d(AC, MN) = d(MN, (SAC))$

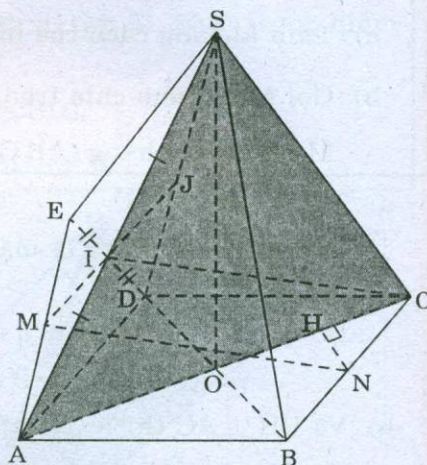
Trong $mp(ABC)$, vẽ $NH \perp AC$.

Ta có $NH \perp AC$ và SO

nên $NH \perp mp(SAC)$

Do đó : $d(AC, MN) = d(MN, (SAC))$

$$\begin{aligned} &= NH = \frac{OB}{2} = \frac{BD}{4} \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



BT9. Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối D 2007

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M là trung điểm AA_1 . Chứng minh BM vuông góc với B_1C . Tính khoảng cách của hai đường BM và B_1C .

- a) Gọi N là trung điểm AB .

Do $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow CN \perp AB$.

Mà $BB_1 \perp mp(ABC) \Rightarrow BB_1 \perp NC$

Do đó $NC \perp mp(AA_1BB_1) \Rightarrow CN \perp BM$ (1)

Ta có ABB_1A_1 vuông $\Rightarrow \triangle AMB = \triangle BNB_1$

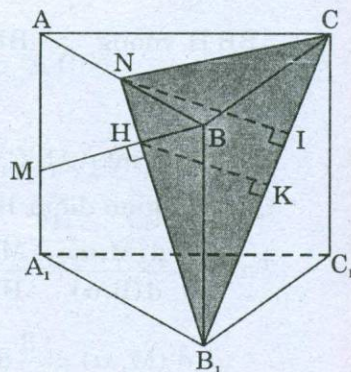
$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{NB_1B}$$

Mà $\widehat{BNB_1} + \widehat{NB_1B} = 1v$

$$\Rightarrow \widehat{BNB_1} + \widehat{ABM} = 1v \Rightarrow \widehat{NHB} = 1v$$

Vậy $BM \perp NB_1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MB \perp mp(NCB_1) \Rightarrow MB \perp B_1C$.



b) ΔNBB_1 vuông tại B có BH đường cao

$$\Rightarrow HB_1 = \frac{BB_1^2}{NB_1} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Vẽ NI và HK vuông góc B_1C .

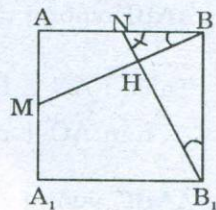
Ta có $MB \perp mp(NCB_1) \Rightarrow MB \perp HK$

Vậy HK là đoạn vuông góc chung của MB và B_1C .

$$\Delta CNB_1 \text{ vuông tại } N \Rightarrow NI = \frac{NC \cdot NB_1}{B_1C} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{8}\sqrt{30}$$

$$\text{Ta có : } HK \parallel NI \Rightarrow \frac{HK}{NI} = \frac{B_1H}{B_1N}$$

$$\Rightarrow HK = d(BM, B_1C) = \frac{B_1H \cdot NI}{B_1N} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{5}} \left(\frac{a\sqrt{30}}{8} \right)}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{10} \quad \blacksquare$$



BT10. Cho hai hình chữ nhật ABCD, ABEF không cùng thuộc một mặt phẳng và $AB = a$, $AD = AF = a\sqrt{2}$, AC vuông góc BF.

a) Gọi I là giao điểm của DF với mặt phẳng chứa AC và song song BF.

Tính $\frac{DI}{DF}$.

b) Tính khoảng cách giữa AC và BF.

a) Trên mp (ABEF) lấy E' đối xứng với E qua F $\Rightarrow BF \parallel AE'$.

Vậy mặt phẳng chứa AC và song song BF là mp (ACE').

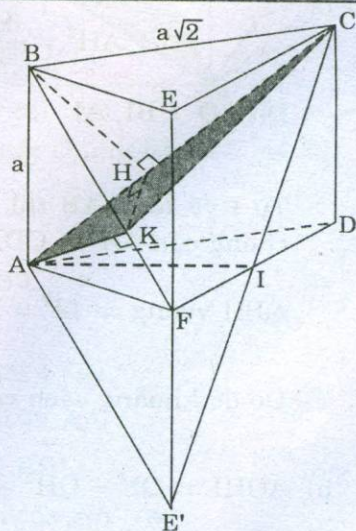
CE' cắt DF tại I.

Do $CD \parallel FE'$ nên I là trung điểm FD

$$\Rightarrow \frac{DI}{DF} = \frac{1}{2}.$$

b) Vẽ $AK \perp BF$, do $AC \perp BF$ (gt) nên $BF \perp mp(ACK)$.

Từ K vẽ $KH \perp AC$ thì HK là đường vuông góc chung của AC và BF.



$$\Delta ABF \text{ vuông} \Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AF}{BF} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Ta có : $AC \perp BF$ và HK

nên $AC \perp mp (BHK) \Rightarrow AC \perp BH$.

$$\Delta ABC \text{ vuông} \Rightarrow AB^2 = AH \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta AHK \text{ vuông} \Rightarrow HK^2 = AK^2 - AH^2 = \frac{6a^2}{9} - \frac{a^2}{3} = \frac{3a^2}{9}$$

$$\Rightarrow d(AC, BF) = HK = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \blacksquare$$

BT11. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống $mp (BCD)$ và O là trung điểm AH .

- Chứng minh AB vuông góc CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD theo a .
- Chứng minh OB, OC, OD vuông góc từng đôi một.
- Xác định điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

a) Do $AB = AC = AD$ nên $HD = HB = HC$.

Vậy H là tâm của Δ đều BCD . Gọi I là trung điểm CD .

$$\Delta AHI \Rightarrow AH^2 = AI^2 - HI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{24a^2}{36}.$$

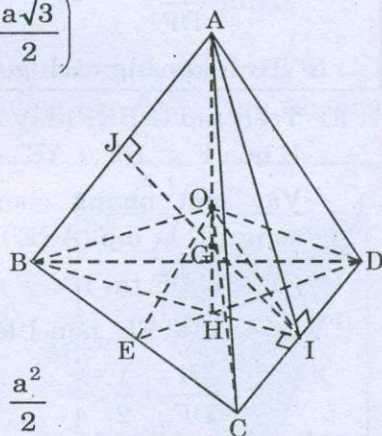
Do $CD \perp BI, AI \Rightarrow CD \perp mp (ABI)$

$\Rightarrow CD \perp AB$

Từ I vẽ $IJ \perp AB$ thì IJ là đường vuông góc chung của AB và CD .

$$\Delta JBI \text{ vuông} \Rightarrow IJ^2 = IB^2 - JB^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

Do đó khoảng cách của AB và CD là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



$$b) \Delta OHI \Rightarrow OI^2 = OH^2 + HI^2 = \frac{1}{4}AH^2 + \frac{1}{9}BI^2 = \frac{6a^2}{36} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3a^2}{4} = \frac{9a^2}{36} = \frac{a^2}{4}$$

ΔOCD có trung tuyến $OI = \frac{1}{2}CD$ vậy vuông tại O .

Tương tự, ΔOBC , ΔOBD vuông tại O .

Vậy OB , OC , OD vuông góc đôi một.

c) Gọi G là trung điểm IJ thì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

Ta có : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

$$\begin{aligned} &= (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 + (\vec{MG} + \vec{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\vec{MG}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \min \Leftrightarrow MG \min \Leftrightarrow M \equiv G$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$ ■

BT12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy M trên đoạn AA' . Xác định mặt cắt của mặt phẳng (MBD') và hình lập phương. Tìm vị trí điểm M trên AA' để diện tích mặt cắt này nhỏ nhất.

- $M_p (MBD')$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$ và $(DCC'D')$ theo hai giao tuyến $BM \parallel D'N$.

Tương tự $m_p (MBD')$ cắt hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$ theo hai giao tuyến $BN \parallel D'M$.

Vậy $MBND'$ là hình bình hành.

- Vẽ $MI \perp BD'$

Ta có : $S = dt (MBND') = 2dt (MBD')$
 $= MI \cdot BD'$

Do đó : $S_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \Leftrightarrow MI$ là đường vuông góc chung của AA' và BD

Do $AA' \parallel BB'$ nên $AA' \parallel mp (BDD'B')$

Gọi O, O' là tâm hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$.

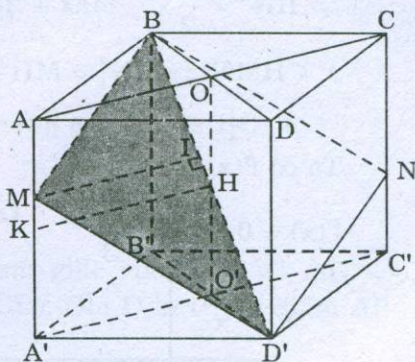
Ta có : $AO \perp BD$ và BB' nên $AO \perp mp (BDD'B')$

Gọi H là giao điểm của BD' và OO'

Vẽ $HK \parallel AO$ thì $HK \perp (BDD'B') \Rightarrow HK \perp BD'$ và OO'
 $\Rightarrow HK \perp BD'$ và AA'

Vậy HK là đường vuông góc chung của AA' và BD'

Do đó : $S_{\min} \Leftrightarrow MI \equiv HK \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AA' ■



BT13. Cho tứ diện S.ABC có SC vuông góc đáy $SC = AC = AB = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông tại A lấy M trên SA, N trên BC sao cho $AM = CN = x$ ($0 < x < 2a$)

- a) Tính MN theo a và x. Tìm x để MN ngắn nhất.
b) Chứng minh khi MN ngắn nhất thì MN là đường vuông góc chung của SA và BC.

a) Vẽ $MH \parallel SC$

$$\Delta HMA \perp \text{cân} \Rightarrow HM = HA = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2}$$

$$HC = AC - AH = a\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(2a - x)$$

$$\Delta CHN \Rightarrow HN^2 = CN^2 + CH^2 - 2CN \cdot CH \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow HN^2 = x^2 + \frac{1}{2}(2a - x)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(2a - x) \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow HN^2 = x^2 + \frac{1}{2}(2a - x)^2 - (2a - x)x$$

$$\Rightarrow HN^2 = \frac{5}{2}x^2 - 4ax + 2a^2$$

$$\Delta \perp HMN \Rightarrow MN^2 = MH^2 + HN^2$$

$$\Rightarrow MN^2 = f(x) = 3x^2 - 4ax + 2a^2$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 6x - 4a$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$$

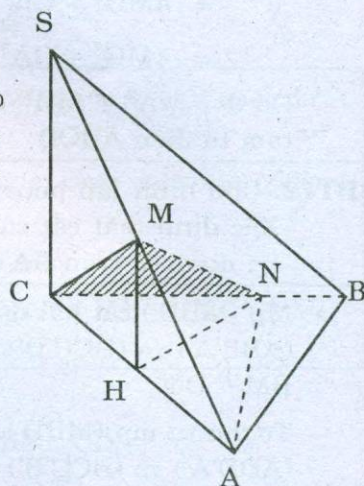
x	0	$\frac{2a}{3}$	2a
f'(x)		- 0 +	
f(x)			

CT

$$\text{Do đó } MN_{\min} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$$

b) Khi $x = \frac{2a}{3}$ thì

$$HC^2 = \frac{1}{2} \left(2a - \frac{2a}{3} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4a}{3} \right)^2 = \frac{8a^2}{9}$$



$$HN^2 = \frac{5}{2} \left(\frac{2a}{3} \right)^2 - 4a \left(\frac{2a}{3} \right) + 2a^2 = \frac{4a^2}{9}$$

$$MN^2 = 3 \left(\frac{2a}{3} \right)^2 - 4a \left(\frac{2a}{3} \right) + 2a^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Delta CAN \Rightarrow AN^2 = CA^2 + CN^2 - 2CA \cdot CN \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow AN^2 = 2a^2 + \frac{4a^2}{9} - 2(a\sqrt{2}) \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10a^2}{9}$$

$$\text{Ta có: } MN^2 + AM^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{4a^2}{9} = \frac{10a^2}{9} = AN^2$$

$$\Rightarrow \Delta AMN \perp \text{ tại } M.$$

$$\Rightarrow MA \perp MN \quad (1)$$

$$\Delta ACM \Rightarrow MC^2 = AC^2 + AM^2 - 2AC \cdot AM \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow MC^2 = 2a^2 + \frac{4a^2}{9} - 2(a\sqrt{2}) \left(\frac{2a}{3} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10a^2}{9}$$

$$\text{Ta có } MN^2 + CN^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{4a^2}{9} = \frac{10a^2}{9} = CM^2$$

$$\text{Vậy } \Delta CMN \perp \text{ tại } N$$

$$\Rightarrow MN \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MN$ là đường vuông góc chung của SA và BC . ■

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $AC = b$, $CB = a$, $SA = h$ và SA vuông góc mp $(ABCD)$. Gọi D là trung điểm AB .

a) Tính góc của AC và SD .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD , BC và SD .

2. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

a) Chứng minh ΔABC vuông và OA vuông góc BC .

b) Tính khoảng cách giữa OA và BC .

c) Chứng minh mp (ABC) vuông góc mp (OBC) .

3. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = 2a$, các cạnh còn lại đều bằng $a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh AB vuông góc CD .

b) Tính khoảng cách giữa AB và CD .

c) Chứng minh mp (ACD) vuông góc (BCD) .

- 206
- 
- Trần Minh Quang

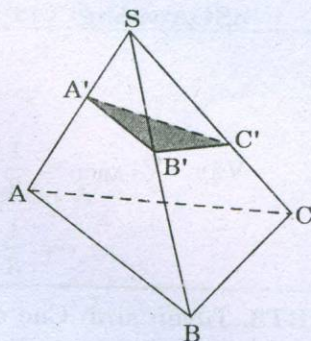
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

B : diện tích đáy
 h : chiều cao

Chú ý : Cho khối chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác S thì :

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$



Dạng 1. KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

BT1. Tốt nghiệp PTTH 2013.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy $ABCD$ hình vuông cạnh a . Góc của SD và $mp(SAB)$ là 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Ta có $AD \perp AB$ và SA nên $AD \perp (SAB)$

Vậy hình chiếu vuông góc của SD lên (SAB) là SA

Do đó góc của SD và (SAB) là góc của SD và SA .

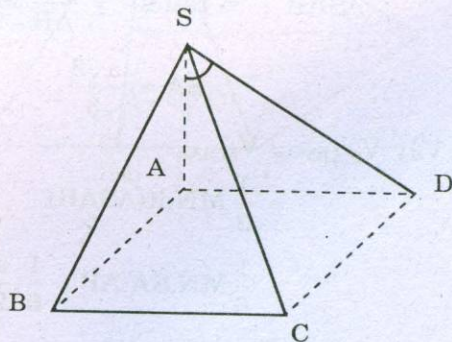
Vậy $\widehat{ASD} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \Delta SAD \perp \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{AD}{SA} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot dt(ABCD)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9} \quad \blacksquare$$



BT2. Tốt nghiệp THPT 2010

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp mp(ABCD)$, góc của hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp đó.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

ΔSBD cân tại $S \Rightarrow SO \perp BD$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$

Vậy góc của hai mặt phẳng (SBD)

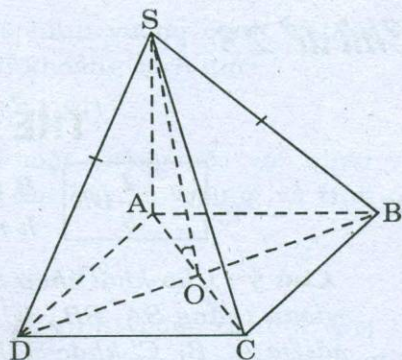
và (ABCD) là $\widehat{SOA} = 60^\circ$.

$$\Delta SOA \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SA}{OA} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot dt(ABCD)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6} \quad \blacksquare$$



BT3. Tuyển sinh Cao đẳng năm 2011

Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc đáy, ΔABC vuông cân tại B, $BA = a$. Gọi M trung điểm SC. Góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Tính thể tích khối chóp S.ABM.

Do định lý 3 đường vuông góc

$BC \perp BA$ nên $BC \perp SB$

Vậy góc của hai mp(SBC) và (ABC)

$$\widehat{SBA} = 30^\circ$$

$$\Delta SAB \perp \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

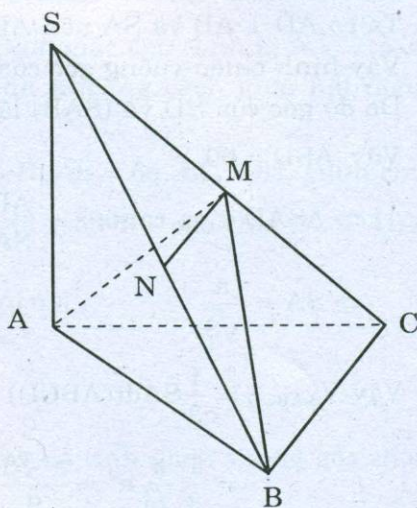
$$\Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABM} = V_{M.SAB}$$

$$= \frac{1}{3} MN \cdot dt(\Delta SAB)$$

$$= \frac{1}{6} MN \cdot SA \cdot AB = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a$$

$$= \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$$



Lưu ý: Chúng ta có thể dùng tỉ số thể tích sẽ được kết quả nhanh hơn

$$\frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ACB}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMB} = \frac{1}{2} V_{S.ACB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA}{3} \cdot dt(\Delta ABC)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36} \quad \blacksquare$$

BT4. Tuyển sinh Đại học khối D năm 2013

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , cạnh bên SA vuông góc đáy, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, M là trung điểm BC và $\widehat{SMA} = 45^\circ$.
 Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ D đến $mp(SBC)$.

- Ta có $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$

Vậy $\triangle ABC$ đều cạnh a và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\triangle SAM \perp$ và $\widehat{SMA} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại A

Vậy $SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích $(ABCD) = 2dt(\triangle ABC) = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$

- Ta có: $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$

Vậy $d(D, SBC) = d(A, SBC)$

Vẽ $AH \perp SM$ (1)

Do $BC \perp (SAM)$ nên $BC \perp AH$ (1)

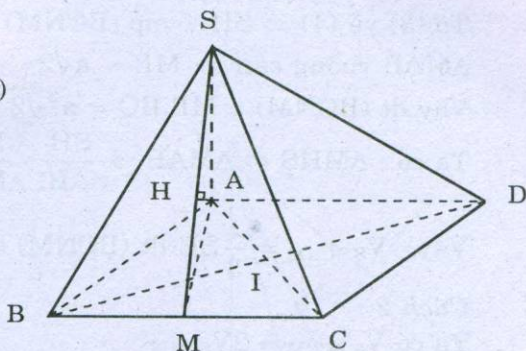
Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\triangle SAM \perp$ cân

$\Rightarrow AH = d(D, (SBC))$

$$= \frac{SM}{2} = \frac{1}{2} AM\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



- Lưu ý: Chúng ta có thể làm cách khác

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{8}$

$$Dt(\triangle SBC) = \frac{1}{2} SM \cdot BC = \frac{1}{2} AM\sqrt{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} a = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$$

Ta có: $V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3} d(A, SBC) dt(\triangle SBC)$

$$\Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{dt(\triangle SBC)}$$

$$= \frac{\frac{3a^3}{8}}{\frac{a^2\sqrt{6}}{4}} = \frac{3a^3}{8} \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{6}} = \frac{3a}{2\sqrt{6}} = \frac{3a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \blacksquare$$

BT5. Tuyển sinh Cao đẳng 2008

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD . Chứng minh $BCNM$ là hình chữ nhật. Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$.

- Ta có : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ mà $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$ (1)

Mặt khác : $BC \perp AB$ và SA

$\Rightarrow BC \perp mp(ASB) \Rightarrow BC \perp BM$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BCNM$ là hình chữ nhật.

Cách 1 :

- Trong mp (SAB) vẽ $SH \perp BM$ (3)

Ta có : $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow SH \perp mp(BCNM)$

ΔMAB vuông cân $\Rightarrow MB = a\sqrt{2}$

Vậy dt $(BCNM) = MB \cdot BC = a^2\sqrt{2}$

Ta có : $\Delta MHS \sim \Delta MAB \Rightarrow \frac{SH}{AB} = \frac{MS}{MB} \Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Vậy $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(BCNM) = \frac{a^3}{3}$

Cách 2 :

Ta có $V_{S.BCNM} = 2V_{S.MBC}$

Mà $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.BCNM} = 2V_{S.MBC}$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3}{3}$

Cách 3 :

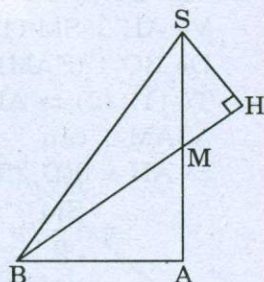
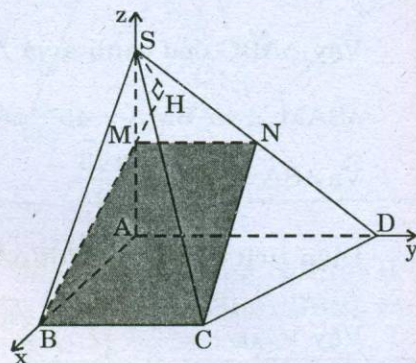
- Gắn trục như hình vẽ thì $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; a; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $S(0; 0; 2a)$

$\Rightarrow M(0; 0; a)$, $N(0; a; a)$

Ta có : $\overrightarrow{MN} = (0; a; 0) = \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BM} = (-a; 0; a)$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow BC \perp BM$

Vậy $BCNM$ là hình chữ nhật.



- Ta có : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} = (a^2; 0; a^2) = a^2(1; 0; 1)$

Vậy phương trình mặt phẳng (BCNM) là :

$$1(x - a) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + z - a = 0$$

$$\text{Do đó } SH = d(S, (BCNM)) = \frac{|0 + 2a - a|}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{và } dt(BCNM) = BC \cdot BM = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2a^2} = a^2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.BCNM} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(BCNM) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a^2\sqrt{2} = \frac{a^3}{3} \blacksquare$$

Lưu ý : Cần thận khi đọc tọa độ C vì CD không vuông góc Oy.

BT6. Đề dự bị ĐH khối B 2004

Cho hình chóp S.ABC có SA = 3a, SA vuông góc mặt phẳng (ABC), BA = BC = 2a, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} SA \cdot dt(\triangle ABC) = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin 120^\circ \\ &= \frac{a}{2} (2a)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vẽ AH $\perp$ BC thì SH $\perp$ BC

$$\triangle ABC \Rightarrow AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4a^2 + 4a^2 - 2(4a^2) \left(-\frac{1}{2}\right) = 12a^2$$

$$\triangle AHC \text{ vuông} \Rightarrow \sin C = \sin 30^\circ = \frac{AH}{AC}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2} AC = a\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \triangle SAH \text{ vuông} \Rightarrow SH^2 &= SA^2 + AH^2 \\ &= 9a^2 + 3a^2 = 12a^2 \end{aligned}$$

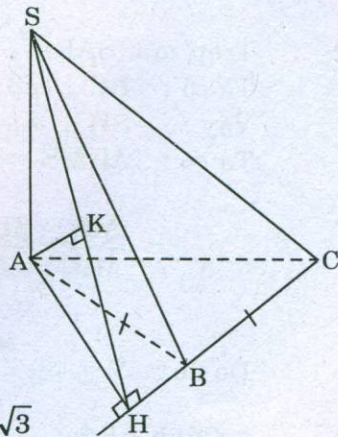
$$\text{Vậy } dt(\triangle SBC) = \frac{1}{2} SH \cdot BC = \frac{1}{2} (2a\sqrt{3}) 2a = 2a^2\sqrt{3}$$

Gọi h là khoảng cách từ A đến mp (SBC).

$$\text{Ta có : } V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3} h \cdot dt(\triangle SBC)$$

$$\Rightarrow h = \frac{3V_{S.ABC}}{dt(\triangle SBC)} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2a^2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}a \blacksquare$$

Lưu ý : Trong bài toán này, vẽ AK $\perp$ SH thì AK $\perp$ (SBC), ta tính trực tiếp AK không cần qua V.



BT7. Đề dự bị ĐH khối A 2006

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc đáy, SB tạo với mặt phẳng đáy góc 60° . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

Ta có : $\widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$ và $SB = 2a$

Ta có mp (BCM) chứa $BC \parallel (SAD)$. Vậy mp (BCM) cắt mp (SAD) theo giao tuyến $MN \parallel BC \parallel AD$.

Ta có : $BC \perp AB$ và SA

$$\Rightarrow BC \perp \text{mp} (SAB) \Rightarrow BC \perp MB.$$

Do đó BCNM là hình thang vuông.

Ta có : $\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3}(2a) = \frac{4a}{3}$

Δ vuông BMA $\Rightarrow MB^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2 = \frac{4a^2}{3}$

Do đó : $dt(BCNM) = \frac{MB}{2}(MN + BC) = \frac{a}{\sqrt{3}}\left(\frac{4a}{3} + 2a\right) = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$

Trên mp (SAB) vẽ $SH \perp MB$.

Ta có : $BC \perp \text{mp} (SBA) \Rightarrow BC \perp SH$

Vậy : $SH \perp \text{mp} (BCNM)$

Ta có : $\Delta HMS \sim \Delta AMB$

$$\Rightarrow \frac{MS}{MB} = \frac{SH}{AB} \Rightarrow SH = \frac{MS \cdot AB}{MB} = \frac{\frac{2}{3}a\sqrt{3} \cdot a}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} = a$$

Do đó : $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}SH \cdot dt(BCNM) = \frac{1}{3}a \cdot \frac{10a^2}{3\sqrt{3}} = \frac{10a^3}{9\sqrt{3}}$ ■

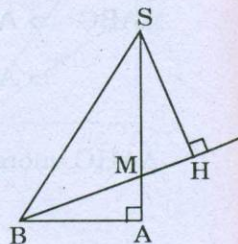
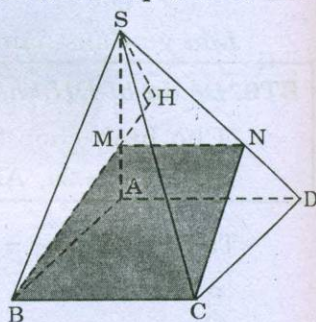
*** Cách khác:**

Có thể dùng tỷ số $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$

$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.MNCB} = V_{S.MBC} + V_{S.MNC}$$

$$= \frac{1}{3}V_{S.ABC} + \frac{1}{9}V_{S.ACD} = \frac{4}{9}V_{S.ABC}$$



BT8. Đề dự bị ĐH khối D 2008

Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại B, $AB = a$, $SA = 2a$, SA vuông góc mp (ABC). Mặt phẳng qua A và vuông góc SC cắt SB, SC tại H, K. Tính thể tích khối chóp S.AHK.

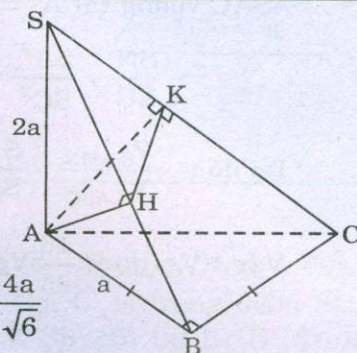
Ta có $BC \perp BA$ và SA nên $BC \perp (SAB)$

$$\Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$$

Mà $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp AH \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$

$$\Rightarrow AH \perp SB \text{ và } HK.$$



• Cách 1 :

$$\Delta SAC \text{ vuông} \Rightarrow SA^2 = SK \cdot SC$$

$$\Rightarrow SK = \frac{SA^2}{SC} = \frac{4a^2}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{4a}{\sqrt{6}}$$

$$\text{và } AK = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta SAB \text{ vuông} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{2a \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta AHK \text{ vuông tại H} \Rightarrow HK^2 = AK^2 - AH^2 = \frac{4a^2}{3} - \frac{4a^2}{5} = \frac{8a^2}{15}$$

$$\text{Vậy dt } (\Delta AHK) = \frac{1}{2} HA \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{15}} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$$

$$\text{Do đó } V_{S.AHK} = \frac{1}{3} SK \cdot \text{dt } (\Delta AHK) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2a^2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{8a^3}{45}.$$

• Cách 2 :

$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{(SH \cdot SB)}{SB^2} \cdot \frac{(SK \cdot SC)}{SC^2} = \frac{SA^4}{SB^2 \cdot SC^2} = \frac{16a^4}{5a^2 \cdot 6a^2} = \frac{8}{15}$$

$$\text{Vậy } V_{S.AHK} = \frac{8}{15} V_{S.ABC} = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{8a^3}{45} \quad \blacksquare$$

Lưu ý : Hiển nhiên cách 2 rất ngắn, ít tính toán.

BT9. Tuyển sinh ĐH khối D 2006

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC. Tính thể tích khối chóp A.BCNM.

$$\text{Ta có : } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \text{dt } (\Delta ABC) = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

$$\Delta SAB \text{ vuông tại } A \Rightarrow SA^2 = SM \cdot SB$$

$$\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}$$

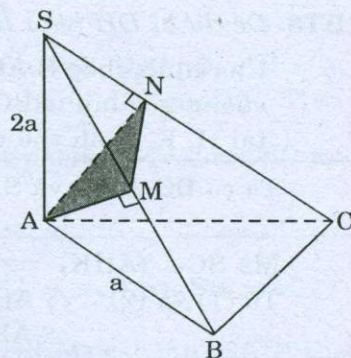
$$\Delta SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow SA^2 = SN \cdot SC$$

$$\Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Do đó: } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{16}{25}$$

$$\text{Vậy } V_{S.AMN} = \frac{16}{25} V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow V_{A.MNCB} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \frac{9}{25} V_{S.ABC} = \frac{9}{25} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{50} \blacksquare$$



BT10. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = c$, $AC = b$. Trên đường vuông góc với (P) tại A lấy S sao cho $SA = h$. M là điểm di động trên cạnh SB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AB.

- Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SI.
- Tính tỉ số giữa thể tích các hình chóp B.MIJ và B.SCA khi độ dài đoạn vuông góc chung của AC và MJ đạt giá trị lớn nhất.

a) Gọi E trung điểm AC $\Rightarrow IE \parallel AB$

Vậy (SIE) là mặt phẳng chứa SI và song song AB.

Vẽ $AH \perp SE$

Ta có $AB \perp mp(SAC) \Rightarrow IE \perp mp(SAC)$

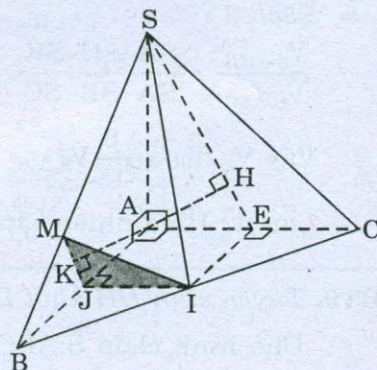
$\Rightarrow IE \perp AH$

Vậy $AH \perp mp(SIE)$

AH chính là đoạn vuông góc chung của hai đường chéo nhau AB và SI.

$$\Delta SAE \text{ vuông} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AE}{SE}$$

$$= \frac{h \cdot \frac{b}{2}}{\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}} = \frac{bh}{\sqrt{4h^2 + b^2}}$$



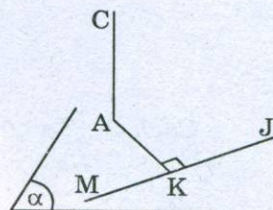
b) Ta có $AC \perp mp(SAB)$ mà $MJ \subset mp(SAB)$.

Từ A vẽ $AK \perp MJ$ thì AK là đường vuông góc chung của AC và MJ.

$$\text{Ta có : } AK \leq AJ = \frac{c}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow K \equiv J \Leftrightarrow M$ là trung điểm SB.

$$\text{Lúc đó : } \frac{V_{B.MIJ}}{V_{B.SAC}} = \frac{BM}{BS} \cdot \frac{BJ}{BA} \cdot \frac{BI}{BC} = \frac{1}{8} \quad \blacksquare$$



BT11. Đề dự bị ĐH khối B 2006

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$, SA vuông góc mặt phẳng (ABCD). Gọi C' là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) qua AC' và song song BD cắt SB, SD tại B', D'. Tính theo a thể tích khối chóp S.AB'C'D'.

Gọi O là tâm hình thoi ABCD.

ΔSAC có SO cắt AC' tại I thì I là trọng tâm ΔSAC .

Mp (P) chứa AC' và song song BD nên (P) cắt mp (SBD) theo giao tuyến B'D' qua I và $B'D' \parallel BD$.

Ta có $BD \perp AC$ và SA nên $BD \perp mp(SAC)$

$$\Rightarrow BD \perp AC' \text{ mà } B'D' \parallel BD \Rightarrow B'D' \perp AC'$$

ΔABD cân tại A có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên là Δ đều

$$\Rightarrow BD = a \text{ và } AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có I là trọng tâm ΔSBD nên

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}a$$

Cách 1 : ΔSAC vuông tại A có AC' là trung tuyến

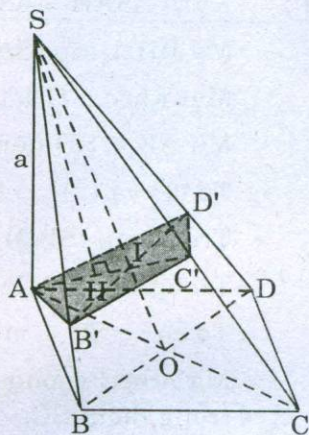
$$\Rightarrow AC' = \frac{SC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$$

Do đó $\Delta SAC'$ đều cạnh a.

Vẽ $SH \perp AC'$, do $B'D' \parallel BD$ và $BD \perp (SAC)$ nên $B'D' \perp SH$

$$\text{Vậy } SH \perp mp(AB'C'D') \text{ và } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó : } V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}SH \cdot dt(AB'C'D') = \frac{1}{6}SH \cdot AC' \cdot B'D'$$



$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(a \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$

Cách 2 : Ta có : $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{1}{9} SA \cdot \frac{1}{2} BO \cdot AC = \frac{1}{18} a \left(\frac{a}{2} \right) (a\sqrt{3}) = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$$

Tương tự : $\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.A'C'D'} = \frac{1}{3} V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Vậy $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36} + \frac{a^3\sqrt{3}}{36} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ ■

BT12. Đề dự bị Tuyển sinh ĐH khối B 2007

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Cho AB = a, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. Chứng minh SC vuông góc mặt phẳng (AHK) và tính thể tích hình chóp O.AHK.

- Ta có : $\triangle SAD = \triangle SAB \Rightarrow AK = AH$

$$\Rightarrow \triangle SAK = \triangle SAH \Rightarrow SK = SH \Rightarrow HK \parallel BD$$

Mà $BD \perp mp(SAC) \Rightarrow HK \perp mp(SAC) \Rightarrow HK \perp SC$ (1)

Mặt khác : $CD \perp mp(SAD) \Rightarrow CD \perp AK$

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SCD) \Rightarrow SC \perp AK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp mp(AHK)$

- Trong mp (SBD) thì SO cắt HK tại I

Trong mp (SAC) thì AI cắt SC tại M

Ta có : $SC \perp mp(AHK) \Rightarrow SC \perp AM$

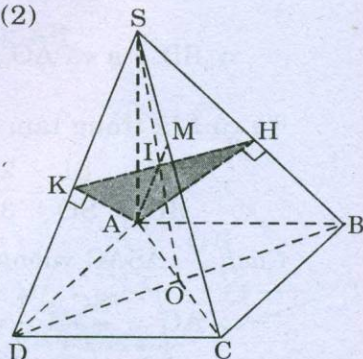
Mà $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên M là trung điểm SC.

Vậy I là trọng tâm $\triangle SAC$.

Ta có : $CM = d(C, mp(AHK)) = \frac{SC}{2} = \frac{2a}{2} = a$

Mà O là trung điểm AC nên

$$\frac{d(O, (AHK))}{d(C, (AHK))} = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = d(O, (AHK)) = \frac{1}{2} CM = \frac{a}{2}$$



Ta có : $\frac{HK}{BD} = \frac{SH}{SB} \Rightarrow \frac{HK}{BD} = \frac{SA^2}{SB}$

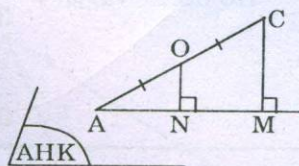
$$\Rightarrow HK = BD \cdot \frac{SA^2}{SB^2} = a\sqrt{2} \cdot \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$$

Ta có : $AI = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{SC}{2} = \frac{SC}{3} = \frac{2a}{3}$

Mà $HK \perp mp(SAC) \Rightarrow HK \perp AI$

Ta có : $V_{O.AHK} = \frac{1}{3} h.d(\Delta AHK)$

$$= \frac{h}{6} AI.HK = \frac{a}{12} \left(\frac{2a}{3} \right) \left(\frac{2}{3}a\sqrt{2} \right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{27} \quad \blacksquare$$



BT13. Đề dự bị ĐH khối B 2007

Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho $AC = R$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho góc phẳng nhị diện cạnh SB bằng 60° . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Chứng minh ΔAHK vuông và tính thể tích tứ diện S.ABC.

Ta có : $\widehat{ACB} = 1v \Rightarrow BC \perp CA$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp mp(SAC)$.

Do đó : $BC \perp AK$ mà $AK \perp SC$ nên $AK \perp mp(SBC)$

Do đó : $AK \perp HK$.

Vậy ΔAHK vuông tại K.

Đặt $SA = h$

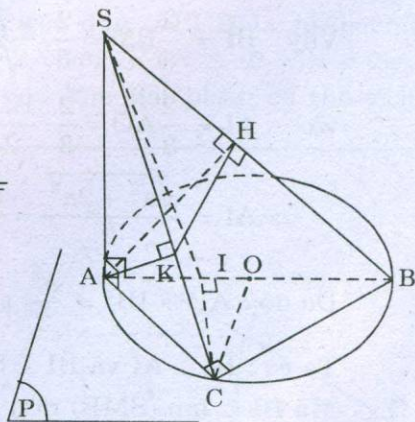
$$\Delta SAC \text{ vuông} \Rightarrow AK = \frac{AC \cdot AS}{SC} = \frac{Rh}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

$$\begin{aligned} \Delta SAB \text{ vuông} \Rightarrow AH &= \frac{AS \cdot AB}{SB} \\ &= \frac{2Rh}{\sqrt{4R^2 + h^2}} \end{aligned}$$

Ta có : $SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$.

Vậy $\widehat{AHK} = 60^\circ$

$$\Delta AHK \text{ vuông} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow 3AH^2 = 4AK^2$$



$$\Rightarrow \frac{3.4R^2h^2}{4R^2 + h^2} = \frac{4R^2h^2}{R^2 + h^2} \Rightarrow 3(R^2 + h^2) = 4R^2 + h^2$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$\text{Do đó : } V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot dt(\triangle ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} CI \cdot AB$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} R \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right) (2R) = \frac{R^3 \cdot \sqrt{6}}{12} \quad \blacksquare$$

BT14. Tuyển sinh ĐH khối B 2006

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và SA vuông góc mặt phẳng $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AD và SC , I là giao điểm của MB và AC . Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc mặt phẳng (SMB) . Tính thể tích của khối tứ diện $A.NIB$.

$$\triangle ABM \text{ vuông tại } A \Rightarrow BM^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Ta có I là trọng tâm $\triangle ABD$

$$\text{Vậy } BI = \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{và } AI = \frac{2}{3} AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{BD}{3}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{\sqrt{a^2 + 2a^2}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó : } AI^2 + IB^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = a^2 = AB^2 \Rightarrow \triangle AIB \text{ vuông tại } I.$$

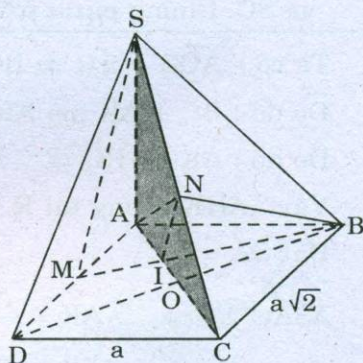
Ta có : $BI \perp AI$ và $BI \perp SA$ nên $BI \perp mp(SAC)$

Mà $BI \subset mp(SMB)$ nên $mp(SAC) \perp mp(SMB)$

$$\bullet \text{ Ta có : } V_{A.NIB} = V_{N.AIB} = \frac{1}{3} NO \cdot dt(\triangle AIB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{SA}{2} \cdot \frac{1}{2} IA \cdot IB$$

$$= \frac{a}{12} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36} \quad \blacksquare$$

* **Lưu ý:** Có thể gắn trục tọa độ để giải.

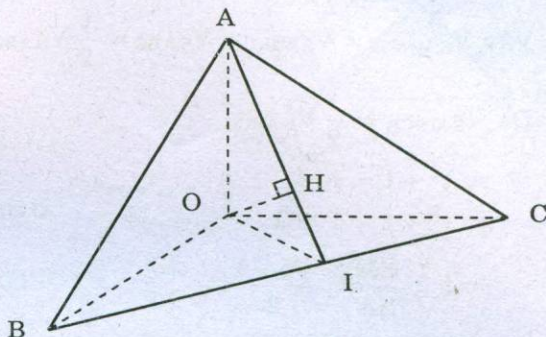


BT15. Cho tứ diện O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các mặt (ABC), (OAB), (OBC), (OAC). Chứng minh:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

Gọi V là thể tích tứ diện O.ABC. Vẽ $OI \perp BC$ và $OH \perp OI$ thì $OH \perp mp(ABC)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{OABC} &= \frac{1}{3} OH \cdot dt(\triangle ABC) \\ &= \frac{1}{3} OA \cdot dt(\triangle OBC) \\ &= \frac{1}{3} OB \cdot dt(\triangle OAC) \\ &= \frac{1}{3} OC \cdot dt(\triangle OAB) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow 3V = OH \cdot S = OA \cdot S_2 = OB \cdot S_3 = OC \cdot S_1$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3V}{OH} \right)^2 = \left(\frac{3V}{OA} \right)^2 + \left(\frac{3V}{OB} \right)^2 + \left(\frac{3V}{OC} \right)^2$$

$$\Rightarrow S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad \blacksquare$$

BT16. Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc đáy, ABCD là hình chữ nhật có $AB = a, AS = 2a$. Lấy M trên SA với $AM = x$ ($0 < x < 2a$). Tìm x theo a để $mp(MBC)$ chia khối chóp làm hai phần có thể tích bằng nhau.

Do $AD \parallel (MBC)$ nên

$$(SAD) \cap (MBC) = MN \parallel AD$$

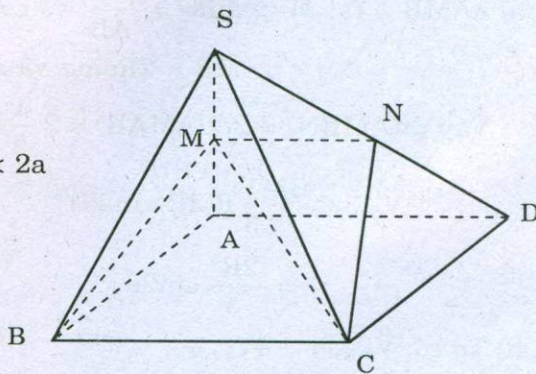
$$\text{Vậy } \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD}$$

$$\Rightarrow \frac{2a - x}{2a} = \frac{MN}{AD} = t \text{ với } 0 < t < 1$$

Ta có:

$$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = t$$

$$\Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{t}{2} V_{S.ABCD}$$



$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = \left(\frac{SM}{SA}\right)^2 = t^2$$

$$\Rightarrow V_{S.MNC} = \frac{t^2}{2} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Vậy } V_{S.MNCB} = V_{S.MBC} + V_{S.MNC}$$

$$\text{Vậy } V_{S.MNCB} = V_{S.MBC} + V_{S.ABC} = \frac{t}{2} V_{S.ABCD} + \frac{t^2}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} (t + t^2) V_{S.ABCD}$$

$$\text{Do } V_{S.MNCB} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow t^2 + t = 1$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{SM}{SA} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{2a - x}{2a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\Rightarrow 2a - x = (\sqrt{5} - 1)a$$

$$\Rightarrow x = (3 - \sqrt{5})a \blacksquare$$

BT17. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn đường kính $AB = 2R$ và dây cung MN vuông góc AB tại H . Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Trên đường vuông góc $mp(P)$ tại A lấy S sao cho $SA = R$.

a) Tính thể tích khối chóp $S.AMBN$ theo R và α .

b) Tìm α để $V_{S.BMN} = 3V_{S.AMN}$.

$$\text{a) } \Delta AMB \perp \text{ tại } M \Rightarrow \sin \alpha = \frac{MB}{AB} \text{ và } \cos \alpha = \frac{AM}{AB}$$

$$\Rightarrow MB = 2R \sin \alpha \text{ và } AM = 2R \cos \alpha$$

$$\text{Vậy } dt(AMBN) = 2dt(\Delta MAB) = 2 \cdot \frac{1}{2} MA \cdot MB = 2R^2 \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow V_{S.AMBN} = \frac{1}{3} R(2R^2 \sin 2\alpha)$$

$$= \frac{2R^3}{3} \sin 2\alpha$$

$$\text{b) Ta có: } V_{S.BMN} = 3V_{S.AMN}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} SA dt(\Delta BMN) = \frac{9}{3} SA \cdot dt(\Delta AMN)$$

$$\Leftrightarrow dt(\Delta BMN) = 3dt(\Delta AMN)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} BH \cdot MN = \frac{3}{2} AH \cdot MN$$

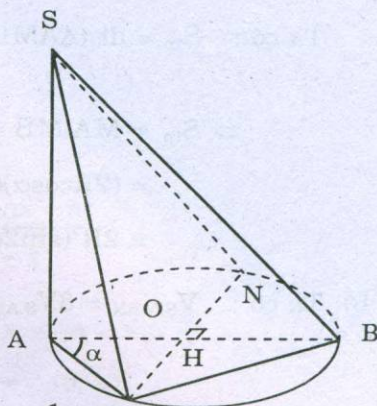
$$\Leftrightarrow BH = 3AH$$

$$AH = \frac{1}{4} AB = \frac{R}{2}$$

$$\Delta AHM \perp \text{ tại } H \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AH}{AM}$$

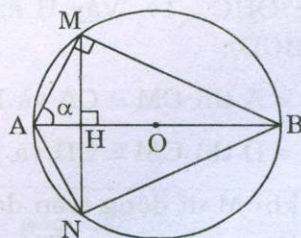
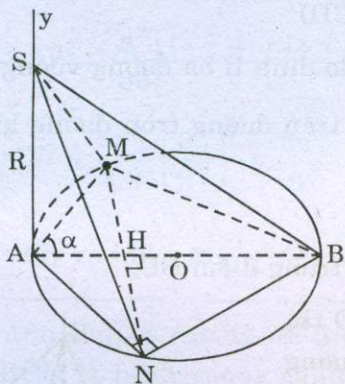
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{R}{2}}{2R \cos \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \left(\text{do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \blacksquare$$



BT18. Trong mặt phẳng (P), cho đường tròn (C) đường kính $AB = 2R$. Dây cung MN vuông góc AB tại H , có $\widehat{BAM} = \alpha$. Lấy điểm S trên đường Ay vuông góc với mặt phẳng (P) sao cho $AS = R$.

- Tính diện tích toàn phần hình chóp $S.AMBN$ theo a và α .
- Tính α để thể tích khối chóp $S.MBN$ gấp ba thể tích khối chóp $S.AMN$.



a) Ta có : ΔMBA vuông tại $M \Rightarrow \sin \alpha = \frac{MB}{AB} \Rightarrow MB = 2R \sin \alpha$

Tương tự : $AM = AN = 2R \cos \alpha$

ΔSAM vuông $\Rightarrow SM^2 = SN^2 = SA^2 + AM^2 = 4R^2 + 4R^2 \cos^2 \alpha$

ΔSAB vuông $\Rightarrow SB^2 = R^2 + 4R^2 = 5R^2$

Theo định lí ba đường vuông góc : $BN \perp NA \Rightarrow BN \perp SN$

$BM \perp MA \Rightarrow BM \perp SM$

$$\text{Ta có : } S_{tp} = dt(\Delta AMBN) + dt(\Delta SAN) + dt(\Delta SAM) + \\ + dt(\Delta SBM) + dt(\Delta SBN)$$

$$\Rightarrow S_{tp} = MA.MB + 2dt(\Delta SAN) + 2dt(\Delta SBN)$$

$$= (2R\cos\alpha)(2R\sin\alpha) + R(2R\cos\alpha) + \sqrt{R^2 + 4R^2\cos^2\alpha} 2R\sin\alpha \\ = 2R^2(\sin 2\alpha + \cos\alpha + \sqrt{1 + 4\cos^2\alpha}.\sin\alpha)$$

$$\text{b) Ta có : } V_{S.MBN} = 3V_{S.AMN} \Leftrightarrow \frac{1}{3}SA\left(\frac{1}{2}BH.MN\right) = SA.\frac{1}{2}AH.MN$$

$$\Leftrightarrow BH = 3AH \Leftrightarrow AH = \frac{AB}{4} = \frac{R}{2}$$

$$\text{Mà : } AM^2 = AB.AH = 2R\left(\frac{R}{2}\right) = R^2 \Rightarrow \Delta AMO \text{ đều} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \blacksquare$$

BT19. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên đường vuông góc với mặt phẳng chứa ABCD tại A, lấy điểm S di động với SA = y. Trên cạnh AD lấy M với AM = x ($0 \leq x \leq a$). Gọi I là trung điểm SC, H là hình chiếu vuông góc của I lên MC.

a) Chứng minh khi M chạy trên đoạn AD thì H di động trên một cung tròn cố định.

b) Cho $x^2 + y^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp S.ABCM.

a) Ta có : $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp mp(ABCD)$

Mà $IH \perp MC \Rightarrow OH \perp MC$ (do định lí ba đường vuông góc)

Ta có : $\widehat{OHC} = 1v$. Vậy H di động trên đường tròn đường kính OC trên mp(ABCD).

Khi $M \equiv A$ thì $CM \equiv CA$ và $H \equiv O$

Khi $M \equiv D$ thì $CM \equiv CD$ và $H \equiv K$ trung điểm CD.

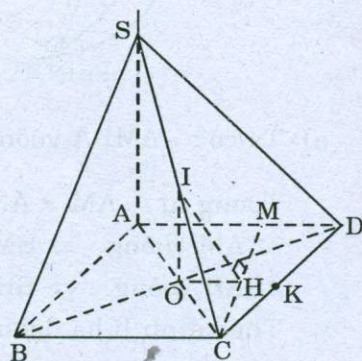
Do đó khi M di động trên đoạn AD thì H di động trên cung $\widehat{OK}$ của đường tròn đường kính OC trên mp(ABCD).

b) Ta có : $V_{S.ABCM} = \frac{1}{3}SA.dt(ABCM)$

$$\Rightarrow V = \frac{y}{3} \cdot \frac{AB}{2}(AM + BC) = \frac{ay}{6}(x + a)$$

$$\text{Mà } x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a}{6}(x + a)\sqrt{a^2 - x^2}$$



Xét $f(x) = (x + a)\sqrt{a^2 - x^2}$ trên $D = [0; a]$

Ta có : $f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + (x + a) \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{a^2 - x^2 - (x + a)x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0; a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + ax - a^2 = 0 \\ x \in (0; a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \vee x = \frac{a}{2} \\ x \in (0; a) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

Ta có : $f(0) = a^2, f(a) = 0, f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

Do đó : $\text{Max}_{[0; a]} V = \frac{a}{6} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{a^3}{8}\sqrt{3}$ khi $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ■

- **Chú ý :** Có thể tìm $\text{Max}V$ bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương.

Ta có : $3V^2 = \frac{a^2}{36} (a + x)(a + x)(a + x)(3a - 3x)$

$$\Rightarrow 3V^2 \leq \frac{a^2}{36} \left[\frac{(x + a) + (x + a) + (x + a) + 3a - 3x}{4} \right]^4$$

$$\Rightarrow V^2 \leq \frac{a^2}{3 \cdot 36} \left(\frac{3}{2}a \right)^4 = \frac{3a^6}{64}$$

Dấu "=" xảy ra khi $3(x + a) = 3a - 3x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

BT20. Cho hình chóp S.ABCD với SA vuông góc mặt phẳng ABCD, SA = h, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Lấy M thay đổi trên đoạn CD với CM = x ($0 \leq x \leq a$).

a) Vẽ SH vuông góc BM. Tính SH theo a, h và x.

b) Tìm vị trí M trên CD để thể tích tứ diện S.ABH đạt giá trị lớn nhất.

a) Ta có $\triangle BMC$ vuông tại C $\Rightarrow BM^2 = x^2 + a^2$

Ta có $\triangle ABH \sim \triangle BMC$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AB}{MB}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot BC}{MB} = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Ta có $\triangle SAH$ vuông tại A

$$\begin{aligned} \Rightarrow SH^2 &= AH^2 + SA^2 \\ &= \frac{a^4}{x^2 + a^2} + h^2 \end{aligned}$$

- b) Ta có mp (SAB) vuông góc mp (ABCD) theo giao tuyến AB.

Vẽ $HK \perp AB$ thì $HK \perp$ mp (SAB).

$$\text{Do đó : } V_{H.SAB} = \frac{1}{3} HK \cdot dt(\triangle SAB) = \frac{1}{6} ah \cdot HK$$

Ta có $\triangle HAB$ vuông tại H $\Rightarrow HK^2 = KA \cdot KB$

Mà do bất đẳng thức Cauchy :

$$a = KA + KB \geq 2\sqrt{KA \cdot KB} = 2HK$$

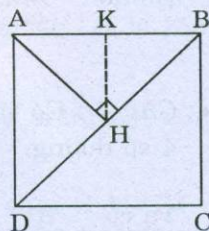
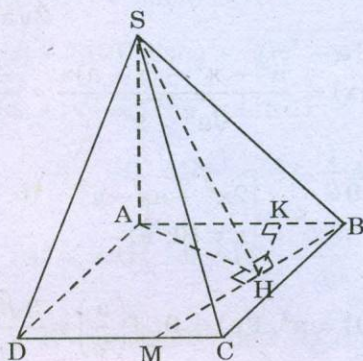
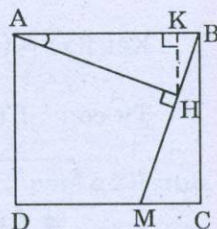
$$\text{Do đó : } V_{SABH} \leq \frac{1}{6} ah \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{a^2 h}{12} \text{ (hằng số)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} KA = KB \\ KA + KB = a \end{cases} \Leftrightarrow KA = KB = \frac{a}{2} \Leftrightarrow K \text{ trung điểm AB}$$

$$\Leftrightarrow \triangle HAB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow H \equiv \text{tâm O hình vuông ABCD} \Leftrightarrow M \equiv D$$

$$\text{Do đó : } V_{\max} = \frac{a^2 h}{12} \text{ khi } M \equiv D \blacksquare$$



BT21. Cho tam giác OAB đều cạnh a. Trên đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (OAB) tại O lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB. Đường thẳng EF cắt d tại N.

a) Chứng minh AN vuông góc BM.

b) Tìm x để thể tích tứ diện ABMN là nhỏ nhất.

a) • Ta có : $BH \perp AC$ và $BH \perp MA \Rightarrow BH \perp mp(MAC) \Rightarrow BH \perp MC$
 mà $BK \perp MC$ nên $MC \perp mp(BHK)$

• Gọi I là trung điểm BC.

Ta có : $BC \perp AI$ và $BC \perp MA$

$\Rightarrow BC \perp mp(MAI) \Rightarrow BC \perp HK$

Do $MC \perp mp(BHK) \Rightarrow MC \perp MK$

Vậy $HK \perp mp(MBC)$.

b) Trong mp(MAI) vẽ $KL \parallel MA$

$\Rightarrow KL \perp mp(ABC)$

Do $HK \perp mp(MBC) \Rightarrow HK \perp MI$

Ta có : $dt(\triangle HKI) = \frac{1}{2}KL.HI = \frac{1}{2}HK.KI$

Do bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$HK^2 + KI^2 \geq 2KH.KI = 2KL.HI$$

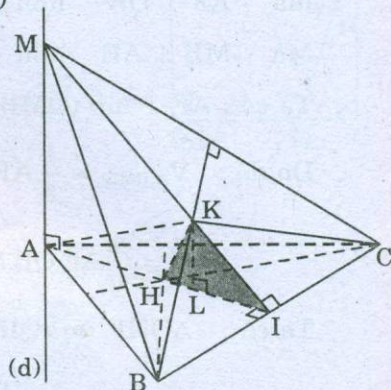
Do đó : $KL \leq \frac{HK^2 + KI^2}{2HI} = \frac{HI^2}{2HI} = \frac{HI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$

Ta có : $V_{K.ABC} = \frac{1}{3}KL.dt(\triangle ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}KL$

$$\Rightarrow V_{K.ABC} \leq \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3}{48}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow KH = KI \Leftrightarrow L$ trung điểm HI.

Do đó : $V_{K.ABC} \max = \frac{a^3}{48}$ ■



Dạng 2. KHỐI CHÓP CÓ MẶT BÊN VUÔNG GÓC ĐÁY

BT1. Tuyển sinh Cao đẳng 2007

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt bên còn lại hợp với đáy góc 60° . Hãy tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

Kẻ $SH \perp BC$

Do mp(SBC) $\perp$ mp(ABC) nên $SH \perp mp(ABC)$

Vẽ $HI \perp AB$ và $HJ \perp AC$ thì $SI \perp AB$ và $SJ \perp AC$.

Do đó : $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 60^\circ$

Vậy : Δ vuông $SHI = \Delta$ vuông $SHJ \Rightarrow HI = HJ$

$\Rightarrow HIAJ$ là hình vuông

Vậy AH là phân giác $\widehat{BAC}$

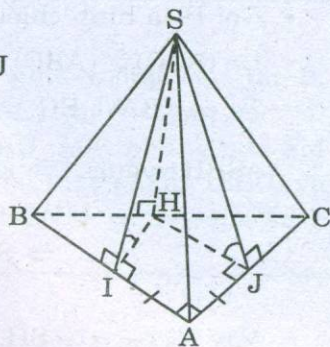
Mà ΔABC cân nên AH là trung tuyến

$\Rightarrow HB = HC$

Ta có : ΔSJH vuông tại H

$$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SH}{HJ} \Rightarrow SH = HJ \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do đó : } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{12} \quad \blacksquare$$



BT2. Tuyển sinh Cao đẳng 2010

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = SB$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$, góc của SC và đáy bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Gọi H là trung điểm AB

ΔSAB cân $\Rightarrow SH \perp AB$

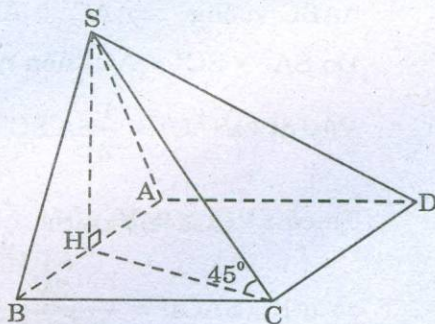
Do mp $(SAB) \perp$ mp $(ABCD)$ nên
 $SH \perp$ mp $(ABCD)$

Vậy góc của SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCH} = \frac{\pi}{4}$

$$\Delta BHC \text{ vuông} \Rightarrow HC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Delta SHC \text{ vuông cân} \Rightarrow SH = HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{5}}{6} \quad \blacksquare$$



BT3. Tuyển sinh ĐH khối D 2011

Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông tại B , $BA = 3a$, $BC = 4a$, mp (SBC) vuông góc mp (ABC) , $SB = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ B đến mp (SAC) .

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BC.

Do $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

Ta có : $BA \perp BC \Rightarrow BA \perp SB$

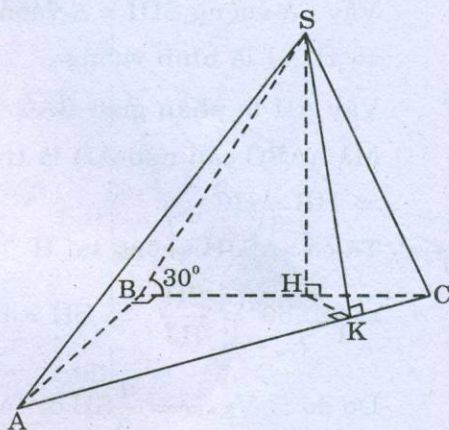
$$\Delta SBH \text{ vuông} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{SH}{SB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{1}{2}SB = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot dt(\Delta ABC)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (a\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a \right)$$

$$= 2\sqrt{3}a^3.$$



- ΔSAB vuông $\Rightarrow SA^2 = SB^2 + BA^2 = 12a^2 + 9a^2 = 21a^2$

$$\Delta SBH \text{ vuông} \Rightarrow BH^2 = SB^2 - SH^2 = 12a^2 - 3a^2 = 9a^2$$

$$\text{Vậy } HC = BC - BH = a.$$

$$\Delta SHC \text{ vuông} \Rightarrow SC^2 = SH^2 + HC^2 = 4a^2$$

$$\Delta ABC \text{ vuông} \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25a^2$$

Do $SA^2 + SC^2 = AC^2$ nên ΔSAC vuông tại S

$$\text{Vậy } dt(\Delta SAC) = \frac{1}{2}SA \cdot SC = a^2\sqrt{21}$$

$$\text{Ta có : } V_{S.ABC} = V_{B.SAC} = \frac{1}{3}d(B, (SAC)) \cdot dt(\Delta SAC)$$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = \frac{3V}{dt(\Delta SAC)} = \frac{6\sqrt{3}a^3}{a^2\sqrt{21}} = \frac{6a}{\sqrt{7}} \quad \blacksquare$$

Lưu ý : Trong đề toán này đặc biệt ΔSAC vuông. Một cách tổng quát ta tính được diện tích ΔSAC như sau :

Về $SK \perp AC$ thì $HK \perp AC$.

$$\Delta CHK \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{HK}{AB} \Rightarrow HK = \frac{CH \cdot AB}{CA} = \frac{a \cdot 3a}{5a} = \frac{3}{5}a$$

$$\Delta SHK \text{ vuông} \Rightarrow SK^2 = SH^2 + HK^2 = 3a^2 + \frac{9a^2}{25} = \frac{84a^2}{25}$$

$$\text{Vậy } dt(\Delta SAC) = \frac{1}{2}SK \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{5} \cdot 5a = a^2\sqrt{21}.$$

BT4. Tuyển sinh ĐH khối A 2011

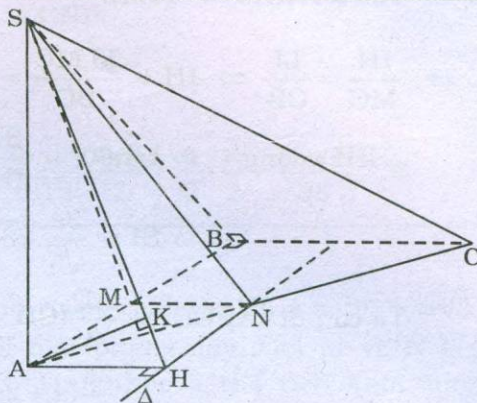
Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng qua SM và song song BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

- Do hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc mp (ABC) nên $SA \perp (ABC)$.

Ta có $BC \perp BA \Rightarrow BC \perp SB$

Vậy góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Do mặt phẳng qua SM và song song BC nên mặt phẳng này cắt mp (ABC) theo giao tuyến qua M và song song BC. Do đó N là trung điểm của AC.



$$\triangle SAB \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = AB\sqrt{3} = 2a\sqrt{3}$$

$$Dt(MNCB) = \frac{MB}{2}(MN + BC) = \frac{a}{2}(a + 2a) = \frac{3a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.MNCB} = \frac{1}{3} \cdot (2a\sqrt{3}) \cdot \frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}.$$

- Qua N kẻ Δ song song AB. Vẽ $AH \perp \Delta$ thì $AB \parallel (SNH)$.

Vậy $d(AB, SN) = d(AB, (SNH)) = d(A, (SNH))$

Vẽ $AK \perp SH$. Do $HN \perp (SAH)$ nên $HN \perp AK$

Vậy $AK \perp (SHN)$

$$\triangle SAH \text{ vuông} \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AH}{SH} = \frac{2a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{12a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$

$$\Rightarrow d(AB, SN) = \frac{2a\sqrt{39}}{13} \quad \blacksquare$$

BT5. Tuyển sinh ĐH khối A 2009

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là 60° . Gọi I là trung điểm AD. Hai mặt phẳng (SIB) và (SIC) cùng vuông góc mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Do hai mặt phẳng (SIB) và (SIC) vuông góc mặt phẳng (ABCD) nên giao tuyến $SI \perp mp(ABCD)$.

Vẽ $IH \perp BC$ thì $SH \perp BC$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là $\widehat{SHI} = 60^\circ$. Gọi J là trung điểm BC.

Vẽ $CM \perp AB$.

Ta có : $\triangle IHJ \sim \triangle CMB$

$$\Rightarrow \frac{IH}{MC} = \frac{IJ}{CB} \Rightarrow IH = \frac{IJ \cdot MC}{BC} = \frac{2a \cdot \frac{3a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

$$\triangle SHI \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SI}{IH} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{3a}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

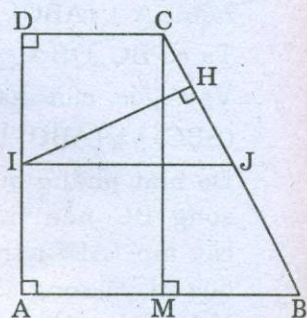
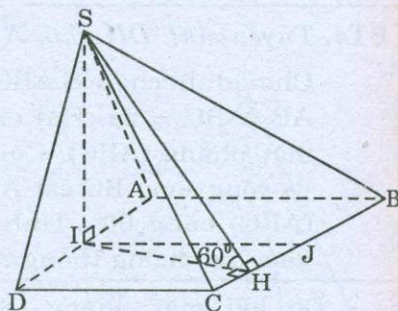
$$\begin{aligned} \text{Ta có : } dt(ABCD) &= \frac{AD}{2}(CD + AB) \\ &= \frac{2a}{2}(a + 2a) = 3a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot dt(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{15}}{5} \cdot 3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5} \quad \blacksquare$$

Lưu ý : Ta có thể tính được IH bằng cách khác

$$dt(\triangle IBC) = dt(ABCD) - dt(ICD) - dt(IAB)$$

$$\Rightarrow IH = \frac{2dt(\triangle IBC)}{BC}$$



BT6. Tuyển sinh ĐH khối A 2007

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, BC và CD. Chứng minh AM vuông góc BP và tính thể tích khối chóp CMNP.

- Gọi H là trung điểm AD.

Do $\triangle SAD$ đều nên $SH \perp AD$

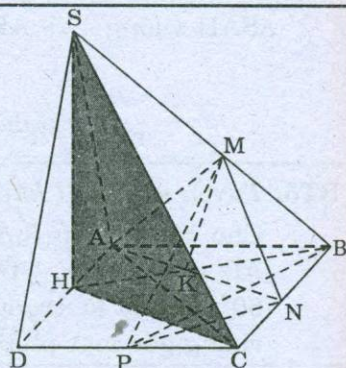
Mà $mp(SAD) \perp mp(ABCD)$

$$\Rightarrow SH \perp mp(ABCD) \Rightarrow SH \perp BP \quad (1)$$

$$\text{Ta có : } \triangle HDC = \triangle BPC \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$$

$$\text{Mà } \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ$$

$$\text{Vậy } \triangle BIC \text{ vuông tại I} \Rightarrow BP \perp CH \quad (2)$$



Từ (1), (2) $\Rightarrow BP \perp mp(SHC)$

Ta có : $MN \parallel SC$ và $AN \parallel HC$

$\Rightarrow mp(SHC) \parallel mp(AMN)$

Do đó : $BP \perp mp(AMN) \Rightarrow BP \perp AM$.

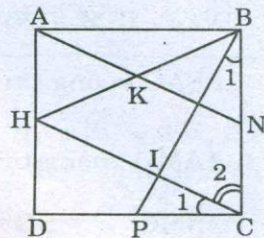
- Vẽ $MK \parallel SH$ với $K \in mp(ABCD)$

Mà $SH \perp mp(ABCD)$ nên $MK \perp mp(ABCD)$.

Do đó MK là đường cao của tứ diện $M.CNP$

Ta có : $V_{M.CNP} = \frac{1}{3} MK \cdot dt(\triangle CNP)$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{SH}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} CN \cdot CP = \frac{1}{12} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{96} \quad \blacksquare$$



BT7. Tuyển sinh ĐH khối B 2008

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC . Tính theo a thể tích khối chóp $S.BMDN$ và cosin của góc giữa hai đường thẳng SM , DN .

- Ta có : $SB^2 + SA^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại $S \Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$

Vậy $\triangle SMA$ đều cạnh a .

Vẽ $SH \perp AB$

Do $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$

nên $SH \perp mp(ABCD)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

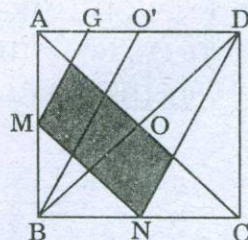
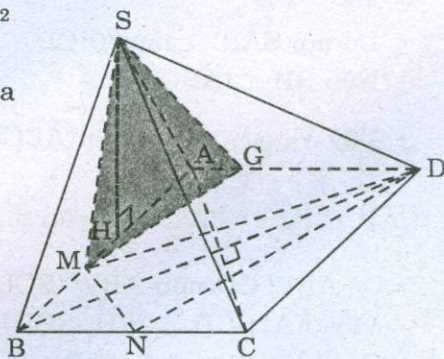
Ta có : $BD \perp AC$ mà $MN \parallel AC$ nên $MN \perp BD$

Do đó : $dt(BMDN) = \frac{1}{2} MN \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot AC = \frac{AC^2}{4} = \frac{(2a\sqrt{2})^2}{4} = 2a^2$

Vậy $V_{S.BMDN} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(BMDN)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a^2 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$$

- Lấy G trên cạnh AD sao cho $AG = \frac{AD}{4} = \frac{a}{2}$



Ta có : $MG \parallel DN \parallel O'B$

Vậy $(\widehat{SM, DN}) = \widehat{SMG}$

$$\Delta SAG \text{ vuông tại } A \Rightarrow SG^2 = SA^2 + AG^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Delta AMG \text{ vuông tại } A \Rightarrow MG^2 = AG^2 + AM^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Delta SMG \Rightarrow SG^2 = MS^2 + MG^2 - 2MS.MG \cos \widehat{SMG}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{SMG} = \frac{MS^2}{2MS.MG} = \frac{MS}{2MG} = \frac{a}{2 \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

Lưu ý : Bài này câu sau quá khó nên ta gắn trực để giải.

BT8. Tuyển sinh Đại học khối B năm 2013

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến $mp(SCD)$.

- Gọi H là trung điểm AB

$$\Delta SAB \text{ đều nên } SH \perp AB \text{ và } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$

Nên $SH \perp (ABCD)$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH.d_t(ABCD)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

- Do $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$

$$\text{Vậy } d(A, SCD) = d(H, SCD)$$

Gọi I là trung điểm CD

Vẽ $HK \perp SI$ (1)

Ta có: $CD \perp HI$ và SH

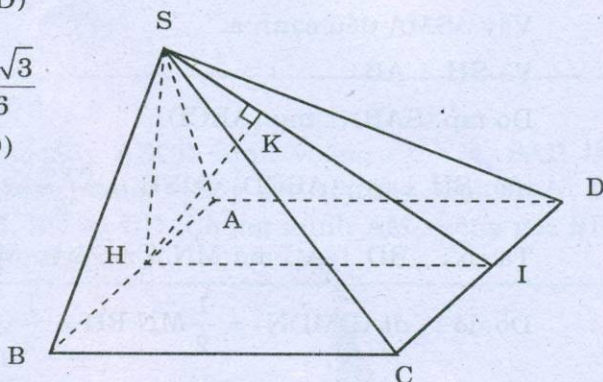
$$\Rightarrow CD \perp (SHI)$$

$$\Rightarrow CD \perp HK \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow HK \perp (SHI)$

Vậy $HK = d(H, SCD) = d(A, SCD)$

$$\Delta SHK \perp \Rightarrow HK = \frac{SH.HI}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad \blacksquare$$



Ghi chú:

Chúng ta phải chuyển điểm tính khoảng cách từ A sang H.

BT9. Tuyển sinh Đại học khối A năm 2013

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a, và mặt bên SBC vuông góc đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ C đến mp(SAB).

- Gọi H là trung điểm BC

$$\Delta SBC \text{ đều nên } SH \perp BC \text{ và } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Do } (SBC) \perp (ABC) \text{ nên } SH \perp (ABC)$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$$

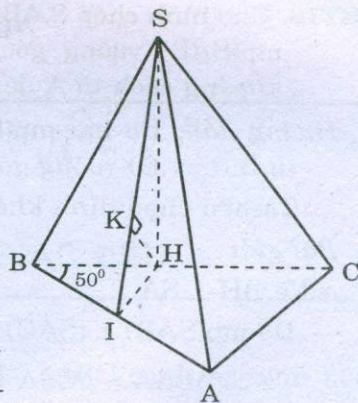
$$\Rightarrow AC = \frac{a}{2}$$

$$\text{Và } AB^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(\Delta ABC)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3}{16}$$



- Do H trung điểm BC và BC cắt mp(SAB) tại B nên $d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB))$

Gọi I trung điểm AB

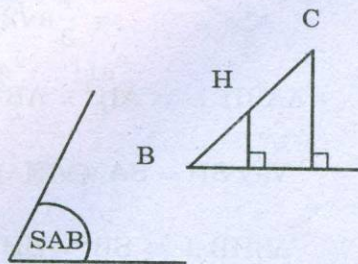
$$\text{Vẽ } HK \perp SI \quad (1)$$

$$\text{Ta có } AB \perp HI \text{ và } SH \text{ nên } AB \perp (SHI)$$

$$\Rightarrow AB = HK \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow HK \perp (SAB)$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } d(C, (SAB)) &= 2HK = 2 \cdot \frac{SH \cdot HI}{SI} = \frac{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{4}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{16}}} \\ &= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{13}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$



Do ΔSBC cân nên $SI \perp BC$

$$\begin{aligned}\Delta SBI \perp \Rightarrow SI^2 &= SB^2 - IB^2 = (13 - 6\sqrt{2})a^2 - a^2 \\ &= (12 - 6\sqrt{2})a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } dt(\Delta SBC) &\Rightarrow \frac{1}{2} SI \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{6} \sqrt{2 - \sqrt{2}} a (2a) \\ &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} a^2\end{aligned}$$

$$\text{Ta có } V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3} dt(A, SBC) \cdot dt(\Delta SBC)$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{3V}{dt(\Delta SBC)} = \frac{3a}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \quad \blacksquare$$

Dạng 3. KHỐI CHÓP ĐA GIÁC ĐỀU

BT1. Tốt nghiệp THPT 2008.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là ΔABC cạnh a , cạnh bên $2a$. Gọi I là trung điểm BC .

- Chứng minh SA vuông góc BC .
- Tính thể tích khối chóp $S.ABI$ theo a .

a) Gọi O là tâm của tam giác đều ABC .

Ta có : $OA = OB = OC$ và $SA = SB = SC = 2a$

nên SO là trục đường tròn (ABC)

$$\Rightarrow SO \perp mp(ABC)$$

Ta có : $BC \perp AI$ và SO nên $BC \perp mp(SAI)$

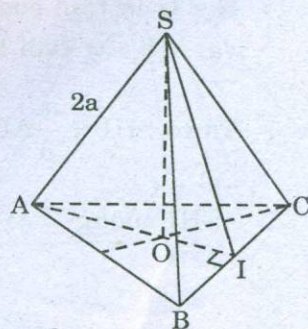
Do đó : $BC \perp SA$.

$$\text{b) Ta có : } OA = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta SAO \text{ vuông} \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{11a^2}{3}$$

$$\text{Do đó : } V_{S.ABI} = \frac{1}{3} SO \cdot dt(\Delta ABI) = \frac{1}{6} SO \cdot dt(\Delta ABC)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{11}}{24} \quad \blacksquare$$



BT2. Cho hình chóp S.ABCD có các cạnh đều bằng nhau, biết thể tích của hình chóp bằng $\frac{9\sqrt{2}}{2}a^3$. Tính độ dài cạnh hình chóp theo a.

Gọi O là tâm hình vuông ABCD cạnh b.

Ta có : $SA = SB = SC = SD = b$

$OA = OB = OC = OD$

nên SO là trục đường tròn (ABCD)

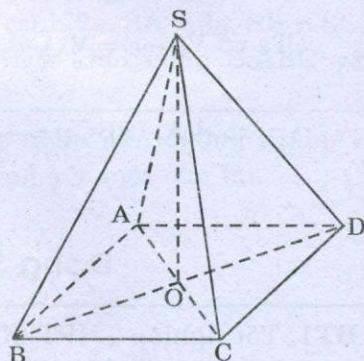
ΔSOC vuông tại O $\Rightarrow SO^2 = SC^2 - OC^2$

$$\Rightarrow SO^2 = b^2 - \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{2}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{SO}{3} \cdot dt(ABCD) = \frac{b^3\sqrt{2}}{6}$

Mà $V = \frac{9\sqrt{2}}{2}a^3 \Leftrightarrow \frac{b^3\sqrt{2}}{6} = \frac{9\sqrt{2}}{2}a^3$

$$\Leftrightarrow SA = 3a \quad \blacksquare$$



BT3. Đề dự bị ĐH khối B 2003

Cho hình chóp đều S.ABC có đáy ΔABC cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng φ ($0 < \varphi < 90^\circ$). Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a và φ .

- Gọi H là tâm của tam giác đều ABC thì $SH \perp mp(ABC)$ và $\widehat{AIS} = \varphi$ (với I trung điểm BC).

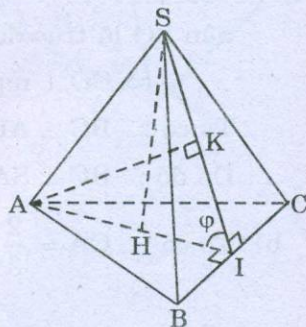
Ta có : $HI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ΔSHI vuông $\Rightarrow \tan \varphi = \frac{d}{k} = \frac{SH}{HI}$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \varphi$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \varphi\right) \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{a^3}{24} \tan \varphi$

- ΔSHI vuông $\Rightarrow \cos \varphi = \frac{k}{h} = \frac{HI}{SI} \Rightarrow SI = \frac{HI}{\cos \varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \varphi}$



$$\text{Vậy } dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2} SI \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12 \cos \varphi}$$

Vẽ $AK \perp mp(SBC)$

$$\text{Ta có : } V_{A.SBC} = \frac{1}{3} AK \cdot dt(\Delta SBC)$$

$$\Rightarrow AK = d(A, mp(SBC)) = \frac{3V}{dt(\Delta SBC)} = \frac{a^3 \tan \varphi}{8} \cdot \frac{12 \cos \varphi}{a^2 \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \quad \blacksquare$$

BT4. Tuyển sinh ĐH khối B 2004

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a , góc của cạnh bên và mặt đáy φ ($0 < \varphi < 90^\circ$). Tính $\tan$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ theo φ và thể tích hình chóp theo a và φ .

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Vẽ $OI \perp BC$ thì $SI \perp BC$

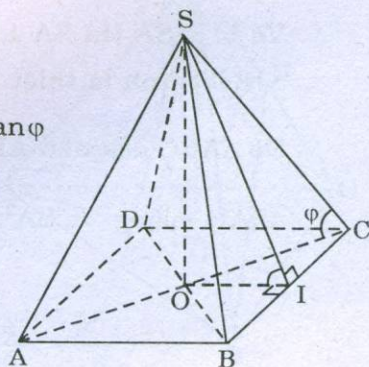
Vậy $\widehat{SIO}$ là góc giữa hai mp (SAB) và $(ABCD)$.

$$\Delta SOC \text{ vuông tại } O \Rightarrow \tan \varphi = \frac{SO}{OC}$$

$$\Rightarrow SO = OC \cdot \tan \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi$$

$$\Delta SOI \text{ vuông tại } O \Rightarrow \tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI}$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \varphi}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2} \tan \varphi$$



$$\text{Do đó : } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot dt(ABCD) = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \tan \varphi \quad \blacksquare$$

BT5. Đề dự bị ĐH khối D 2006

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a . Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt phẳng (SBC) bằng b . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Gọi M là trung điểm BC.

Ta có $BC \perp HM$ và SH nên $BC \perp (SHM)$

$\Rightarrow M_p(SBC) \perp m_p(SHM)$

Vẽ IJ và $HK \perp SM$ thì $IJ \perp m_p(SBC)$

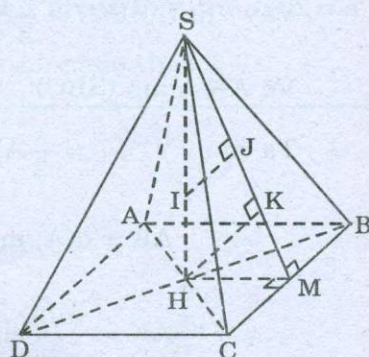
$\Rightarrow IJ = b$ và $HK = 2IJ = 2b$

ΔSHM vuông nên $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{4b^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{a^2 - 16b^2}{4a^2b^2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

$$\text{Do đó : } V_{S.ABCD} = \frac{SH}{3} dt(ABCD) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3b}{\sqrt{a^2 - 16b^2}} \blacksquare$$



BT6. Cho $S.ABC$ hình chóp đều cạnh đáy a , đường cao $SH = a\sqrt{3}$. Nếu mặt phẳng (P) qua BC và vuông góc SA thì mặt phẳng (P) chia hình chóp theo tỉ số nào ?

Gọi I là trung điểm BC, H là tâm của Δ đều ABC.

Ta có $BC \perp AI$ và SH nên $BC \perp m_p(SAI)$.

Vẽ $IJ \perp SA$ thì $SA \perp IJ$ và BC nên $SA \perp m_p(JBC)$.

ΔJBC chính là thiết diện của (P) và hình chóp.

$$\text{Do } \Delta ABC \text{ đều nên } AH = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

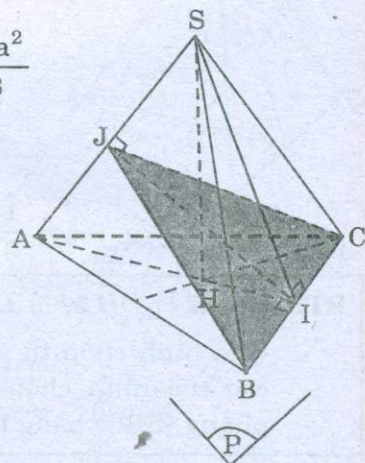
ΔSAH vuông $\Rightarrow SA^2 = SH^2 + AH^2$

$$= (a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{10a^2}{3}$$

$$\text{Ta có : } dt(\Delta SAI) = \frac{1}{2} SH \cdot AI = \frac{1}{2} IJ \cdot SA$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{SH \cdot AI}{SA} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{3}}} = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$$

$$\Delta AJI \text{ vuông} \Rightarrow AJ^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{27a^2}{40} = \frac{3a^2}{40}$$



$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \frac{V_{SJBC}}{V_{SABC}} &= \frac{SJ}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{SA - AJ}{SA} = 1 - \frac{AJ}{SA} \\ &= 1 - \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}}{\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{3}}} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

BT7. Tuyển sinh DH khối B 2012

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2a, AB = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Chứng minh SC vuông góc mp (ABH). Tính thể tích khối chóp S.ABH theo a.

- Gọi O là tâm của tam giác đều ABC.

Do S.ABC là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

Gọi I là trung điểm của AB.

$\triangle ABC$ đều nên $CI \perp AB$ mà $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SIC) \Rightarrow AB \perp SC$

Ta có $SC \perp AB$ và $AH \Rightarrow SC \perp (ABH)$.

- Ta có $CO = \frac{2}{3}CI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\triangle SOC \text{ vuông} \Rightarrow SO^2 = SC^2 - OC^2 = 4a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{33a^2}{9}$$

$$\text{Ta có dt } (\triangle SIC) = \frac{1}{2}SO \cdot CI = \frac{1}{2}IH \cdot SC$$

$$\Rightarrow IH = \frac{SO \cdot CI}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{33}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{11}}{4}$$

$$\text{Do đó dt } (\triangle AHB) = \frac{1}{2}IH \cdot AB = \frac{a^2\sqrt{11}}{8}$$

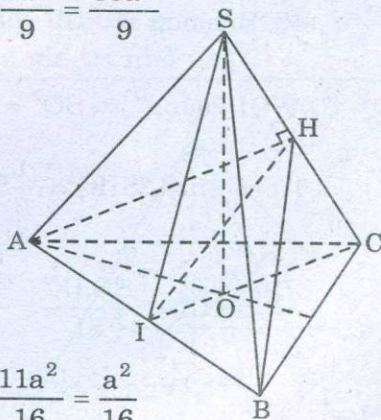
$$\triangle IHC \text{ vuông} \Rightarrow HC^2 = IC^2 - IH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{11a^2}{16} = \frac{a^2}{16}$$

$$\text{Vậy } SH = SC - HC = 2a - \frac{a}{4} = \frac{7a}{4}$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABH} = \frac{1}{3}SH \cdot \text{dt } (\triangle ABH) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{11}}{8} = \frac{7\sqrt{11}}{96}a^3$$

Cách khác : Có thể dùng tỉ số thể tích

$$\frac{V_{S.ABH}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SC} = \frac{7}{8} \Rightarrow V_{S.ABH} = \frac{7}{8}V_{S.ABC} \quad \blacksquare$$



BT8. Tuyển sinh Cao đẳng 2009

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, CD . Chứng minh MN vuông góc SK . Tính thể tích khối $A.MNK$.

Cách 1 :

- $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow SA = SB = SC = SD$ (1)

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow OA = OB = OC = OD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO$ là trục đường tròn ($ABCD$) $\Rightarrow SO \perp mp (ABCD)$

ΔSCD cân tại $S \Rightarrow SK \perp CD$

Mà $CD \parallel AB \parallel MN \Rightarrow SK \perp MN$.

- Gọi I là trung điểm AB .

ΔSAB cân $\Rightarrow SI \perp AB$

Vẽ $KH \perp SI$ (3)

Ta có : $AB \perp SI$ và SC nên $AB \perp mp (SIK)$

$\Rightarrow AB \perp HK$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow KH \perp mp (SAB)$

$$\Delta SIB \text{ vuông} \Rightarrow SI^2 = SB^2 - IB^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$$

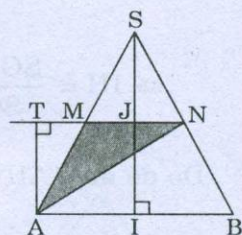
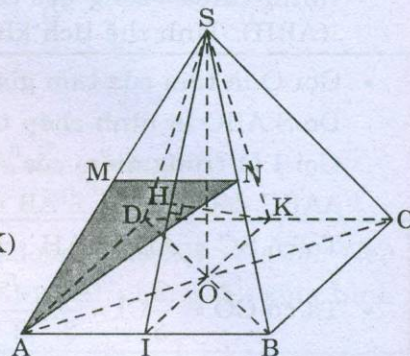
$$\Delta SOI \text{ vuông}^* \Rightarrow SO^2 = SI^2 - OI^2 = \frac{7a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{6a^2}{4}$$

$$\text{Ta có : } dt(\Delta SIK) = \frac{1}{2}SO.IK = \frac{1}{2}HK.SI$$

$$\Rightarrow HK = \frac{SO.IK}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}.a}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

$$dt(\Delta MNA) = \frac{1}{2}AT.MN = \frac{1}{4}S_{IMN} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{16}$$

$$\text{Vậy } V_{A.MNK} = \frac{1}{3}KH.dt(\Delta MNA) = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}$$



Lưu ý : Chứng minh $MN \perp SK$ quá dễ. Còn việc tính V quá phức tạp. Chúng ta khá khó khăn để chọn K là đỉnh và H là chân đường vuông góc hạ từ K đến mặt phẳng (MNA). Kể đến việc tính KH phải qua diện tích. Chúng ta sẽ xem bài giải cách 2 gắn trực vào tính V dễ dàng sau đây.

Cách 2 : Gắn trục như hình vẽ.

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{2}\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$$

$$D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{4}\right), N\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{6}}{4}\right), K\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$$

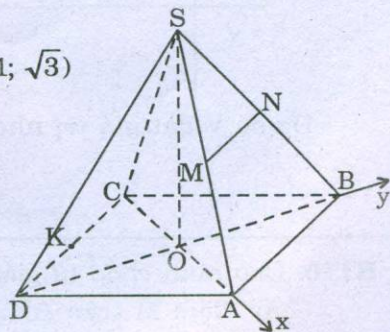
$$\text{Ta có : } \vec{AM} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}(-1; 0; \sqrt{3})$$

$$\vec{AN} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}(-1; 1; \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \vec{AM} \wedge \vec{AN} = \frac{2a^2}{16}(-\sqrt{3}; \sqrt{3}; -1)$$

$$\vec{AK} = \left(-\frac{3a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$$

$$V_{A.MNK} = \frac{1}{6} |(\vec{AM} \wedge \vec{AN}) \cdot \vec{AK}| = \frac{a^3 \sqrt{6}}{48} \blacksquare$$



BT9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a$. Gọi φ là góc của mặt bên và mặt đáy của khối chóp. Tìm φ sao cho thể tích khối chóp đạt giá trị nhỏ nhất.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD thì $OI \perp BC$ và $SI \perp BC$ nên

$$\widehat{OIS} = \varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

Vẽ $JK \perp SI$.

Ta có $BC \perp \text{mp}(SJI) \Rightarrow BC \perp JK$

Vậy $JK \perp \text{mp}(SBC)$

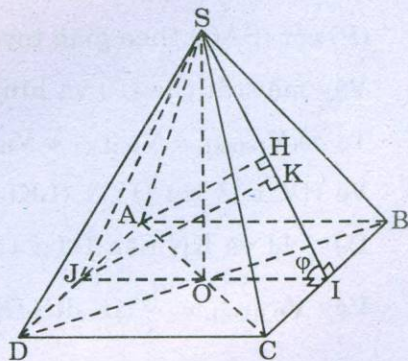
Do $AD \parallel \text{mp}(SBC)$ nên

$$JK = d(J, (SBC)) = d(A, (SBC)) = 2a$$

$$\Delta JKI \text{ vuông} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{JK}{IJ} \Rightarrow IJ = \frac{2a}{\sin \varphi}$$

$$\Delta SOI \text{ vuông} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{SO}{OI} \Rightarrow SO = \frac{a}{\sin \varphi} \cdot \tan \varphi = \frac{a}{\cos \varphi}$$

$$\text{Do đó } V = \frac{1}{3} SO \cdot \text{dt}(ABCD) = \frac{a}{3 \cos \varphi} \cdot \left(\frac{2a}{\sin \varphi}\right)^2 = \frac{4a^3}{3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}$$



Đặt $t = \cos \varphi$ ($0 < t < 1$)

$$\text{Xét } y = \cos \varphi \sin^2 \varphi = t(1 - t^2) = t - t^3$$

$$\Rightarrow y' = 1 - 3t^2; \quad y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

t		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
y'	-	0	+		+	0	-	
y						CD		

Do đó V đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow y = \cos \varphi \sin^2 \varphi$ đạt giá trị lớn nhất

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$

BT10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy a đường cao $SH = a\sqrt{2}$. Lấy điểm M trên AH . Mặt phẳng (P) qua M song song với AD và SH cắt AB ; CD ; SD ; SA lần lượt tại I , J , K , L . Tìm vị trí M trên AH để thể tích khối $D.IHJKL$ đạt giá trị lớn nhất.

Do $S.ABCD$ chóp tứ giác đều nên H là tâm hình vuông $ABCD$

Do $(P) \parallel (AD)$ nên (P) cắt $(ABCD)$ và (SAD) theo giao tuyến $IJ \parallel KL \parallel AD$

Do $(P) \parallel SH$ nên (P) cắt (SBD) theo giao tuyến $NK \parallel SH$.

(P) cắt (SAC) theo giao tuyến $ML \parallel SH$

Vậy mặt cắt của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang cân $LKJI$

$$\text{Ta có } V_{D.IHJL} = V_{H.ILKJ} + V_{D.ILKJ}$$

Vẽ $HY \perp IJ$ thì $HY \perp (LKIJ)$

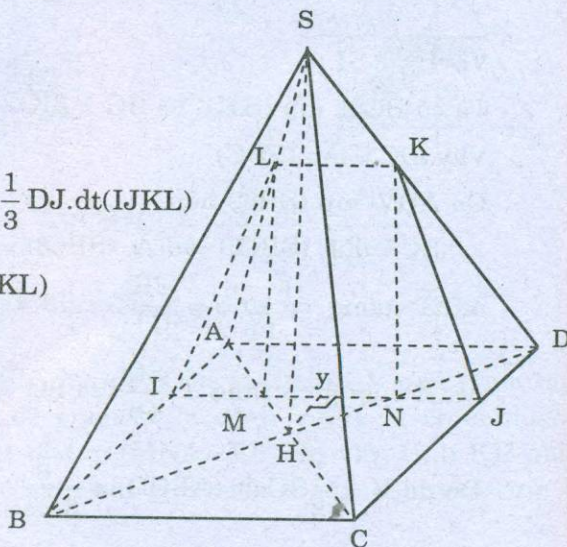
$DJ \perp IJ$ và KN nên $DJ \perp (IJKL)$

$$\text{Vậy } V_{D.IHJL} = \frac{1}{3} HK \cdot dt(IJKL) + \frac{1}{3} DJ \cdot dt(IJKL)$$

$$= \frac{1}{3} (HK + DJ) dt(IJKL)$$

$$= \frac{a}{6} \cdot \frac{1}{2} (KL + IJ) LM$$

$$\text{Đặt } x = AM \quad \left(0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)$$



$$\Delta AIM \perp \text{cân} \Rightarrow IM = \frac{AM}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có } ML \parallel SH \Rightarrow \frac{ML}{SH} = \frac{AM}{AH} = \frac{2x}{a\sqrt{2}} \Rightarrow ML = a\sqrt{2} \left(\frac{2x}{a\sqrt{2}} \right) = 2x$$

$$\Delta IKM \perp \Rightarrow IL^2 = IM^2 + ML^2 = \frac{x^2}{2} + 4x^2 = \frac{9x^2}{2}$$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} LK \parallel AD \Rightarrow \frac{LK}{AD} = \frac{SL}{SA} \\ LM \parallel SH \Rightarrow \frac{LM}{HA} = \frac{SL}{SA} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{LK}{AD} = \frac{LM}{HA}$$

$$\text{Vậy } LK = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \cdot a = \frac{a\sqrt{2} - 2x}{\sqrt{2}} = a - x\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } V_{D.IHJKL} = \frac{a}{12} \left[(a - x\sqrt{2}) + a \right] 2x$$

$$\text{Xét } V_{(x)} = -\frac{a\sqrt{2}}{6}x^2 + \frac{a^2}{3}x \text{ trên } \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}a \right]$$

$$\text{Ta có } V'(x) = -\frac{a\sqrt{2}}{3}x + \frac{a^2}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V'(x) = 0 \\ x \in \left[0, \frac{a\sqrt{2}}{2} \right] \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có: } V(0) = 0 \text{ và } V\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Do đó } V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow M \equiv H. \blacksquare$$

Dạng 4. KHỐI CHÓP CÓ $SH \perp (ABCD)$, VỚI $H \in (ABCD)$

BT1. Đề dự bị ĐH khối D 2002

Tính thể tích khối tứ diện ABCD biết $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ và $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60^\circ$.

Vẽ $DH \perp mp(ABC)$

Từ H vẽ $HM \perp AB$ và $HN \perp AC$ thì $DM \perp AB$ và $DN \perp AC$

Ta có : Δ vuông DMA = Δ vuông DNA

$$\Rightarrow DN = DM$$

Δ vuông DMH = Δ vuông DNH

$$\Rightarrow HN = HM$$

Vậy AH là phân giác $\widehat{CAB}$.

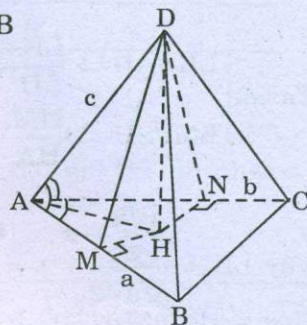
$$\Delta DAM \text{ vuông} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{AM}{AD} \Rightarrow AM = \frac{c}{2}$$

$$\Delta AMH \text{ vuông} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{AM}{AH} \Rightarrow AH = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta DAH \text{ vuông tại H} \Rightarrow DH^2 = AD^2 - AH^2 = c^2 - \frac{c^2}{3} = \frac{2c^2}{3}$$

$$\text{Ta có : } dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ab\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} DH \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{ab\sqrt{3}}{4} = \frac{abc\sqrt{2}}{12} \blacksquare$$



BT2. Đề mẫu tuyển sinh ĐH khối D 2010

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC cân tại B, $AC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $SA = SB = SC$, SA tạo với mặt phẳng (ABC) góc bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Gọi I là trung điểm BC.

Gọi H là điểm đối xứng của B qua I.

ΔBAC cân $\Rightarrow BI \perp AC$

Vậy ABCD là hình thoi.

Mà $\widehat{ABH} = \widehat{HBC} = 60^\circ$

Vậy ΔHAB và ΔHBC đều

$$\Rightarrow HA = HB = HC \quad (1)$$

$$\text{Mà } SA = SB = SC \quad (2)$$

Vậy SH là trục đường tròn qua (ABC)

$$\Rightarrow SH \perp mp(ABC)$$

$$\triangle BAI \text{ vuông} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{AI}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

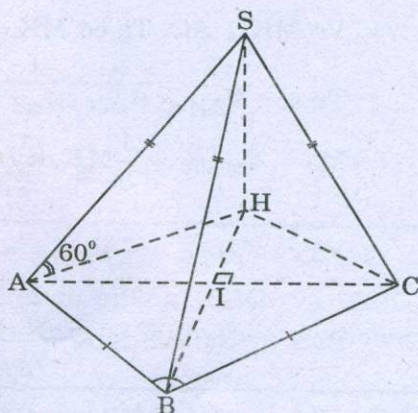
$$\text{Ta có } (\widehat{SA, (ABC)}) = \widehat{SAH} = 60^\circ$$

$$\triangle SAH \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SH}{AH} = \frac{SH}{AB} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a$$

$$dt(\triangle ABC) = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} BA^2 \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(\triangle ABC) = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{36} \quad \blacksquare$$



BT3. Tuyển sinh ĐH khối D 2010

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là H trên đoạn AC với $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của $\triangle SAC$. Chứng minh M là trung điểm SA. Tính thể tích khối S.MBC theo a.

$$\bullet \triangle SHA \text{ vuông} \Rightarrow SH^2 = SA^2 - AH^2 = SA^2 - \frac{AC^2}{16} = a^2 - \frac{(a\sqrt{2})^2}{16} = \frac{14a^2}{16}$$

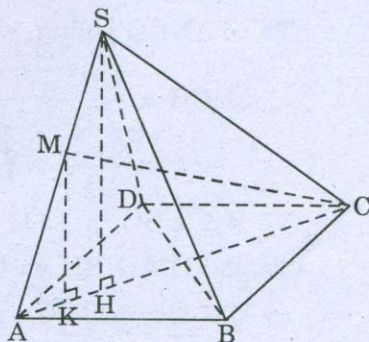
$$\triangle SHC \text{ vuông} \Rightarrow SC^2 = SH^2 + HC^2$$

$$= SH^2 + \left(\frac{3AC}{4}\right)^2$$

$$= \frac{14a^2}{16} + \frac{9(a\sqrt{2})^2}{16} = 2a^2$$

Do $SC = AC = a\sqrt{2}$ nên $\triangle SAC$ cân tại C

$\Rightarrow M$ là trung điểm SA.



- Vẽ $MK \perp AC$. Ta có $MK = \frac{1}{2}SH$

Ta có : $V_{S.MBC} + V_{M.ABC} = V_{S.ABC}$

Mà $V_{M.ABC} = \frac{1}{3}MK \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}SH \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}V_{S.ABC}$

Vậy $V_{S.MBC} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}SH \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$ ■

Lưu ý : Có thể dùng $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

BT4. Tuyển sinh ĐH khối A 2010

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M và N là trung điểm AB và AD , H là giao điểm CN và DM . Biết SH vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC .

- Ta có : $dt(CDNM) = dt(ABCD) - dt(\Delta AMN) - dt(\Delta MBC)$

$$= a^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot (a) \cdot \left(\frac{a}{2}\right) = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}SH \cdot dt(CDNM) = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$$

- Ta có Δ vuông $NDC = \Delta$ vuông MAD

$$\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{NCD}$$

Mà $\widehat{MDA} + \widehat{MDC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{NCD} + \widehat{MDC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta HDC \text{ vuông tại } H$$

Vậy $CN \perp DM$

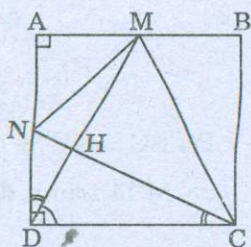
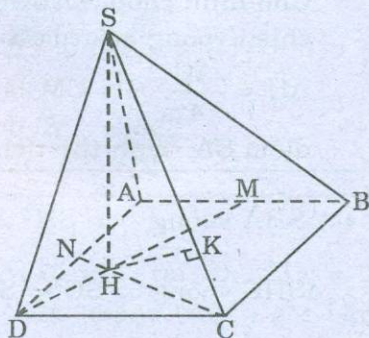
Ta có ΔNDC vuông $\Rightarrow CD^2 = CH \cdot CN$

$$\Rightarrow CH = \frac{CD^2}{CN} = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Vẽ $HK \perp SC$ (1)

Ta có : $DM \perp SH$ và CN

$$\Rightarrow DM \perp mp(SHC) \Rightarrow DM \perp HK$$
 (2)



Vậy $HK = d(SC, DM)$

$$\Delta SHC \text{ vuông} \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2}$$

$$\Rightarrow HK = d(SC, DM) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \quad \blacksquare$$

BT5. Đề dự bị Tuyển sinh ĐH khối A 2007

Cho hình chóp $S.ABC$ có góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tam giác ABC và SBC đều cạnh a . Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Gọi I là trung điểm BC .

ΔABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$

ΔSBC đều $\Rightarrow SI \perp BC$

Vậy $\widehat{SIA} = 60^\circ$

Do đó ΔSIA đều có cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $dt(\Delta SAI) = \frac{1}{2} AI \cdot SI \sin 60^\circ$

$$\Rightarrow dt(\Delta SAI) = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{B.SAI}}{V_{B.SAC}} = \frac{BI}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V_{B.SAC} = 2V_{B.SAI} = \frac{2}{3} BI \cdot dt(\Delta SAI) = \frac{2}{3} \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} \right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

Gọi M là trung điểm SA .

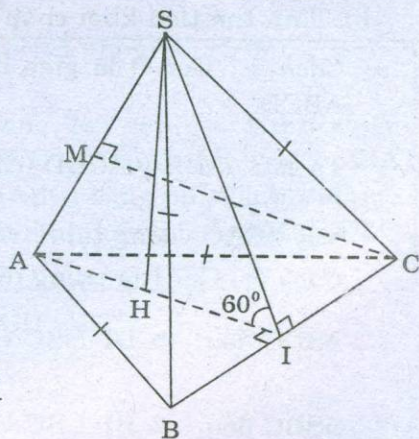
ΔSAC cân tại C có $CS = CA = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow CM^2 = CA^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \right)^2 = \frac{13a^2}{16}$$

$$\text{Vậy } dt(\Delta SAC) = \frac{1}{2} CM \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

$$\text{Ta có: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} d(B, (SAC)) \cdot dt(\Delta SAC)$$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{dt(\Delta SAC)} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{16}{a^2\sqrt{39}} = \frac{3a}{\sqrt{13}} \quad \blacksquare$$



*** Cách khác:**

Vẽ $SH \perp AI$ (1)

Do $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SH \perp (ABC)$ và $SH = AI. \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$$

BT6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1.

a) Chứng minh ΔSAC vuông.

b) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

a) *Cách 1* : Gọi O là giao điểm hai đường chéo BD và AC của hình thoi $ABCD$.

$$\text{Ta có : } \Delta SDB = \Delta CBD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow SO = OC = \frac{AC}{2}$$

Vậy ΔSAC vuông tại S .

Cách 2 : Gọi I là trung điểm SC .

$$\Delta SDC \text{ đều} \Rightarrow DI \perp SC \text{ và } DI = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta SBC \text{ đều} \Rightarrow BI \perp SC \text{ và } BI = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta có : $SC \perp mp(DIB) \Rightarrow SC \perp OI$

Mà $OI \parallel SA \Rightarrow SC \perp SA$.

b) *Cách 1* : Vẽ $SH \perp AC$ (1)

Ta có $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow BD \perp AC$

ΔSBD cân $\Rightarrow SO \perp BD$

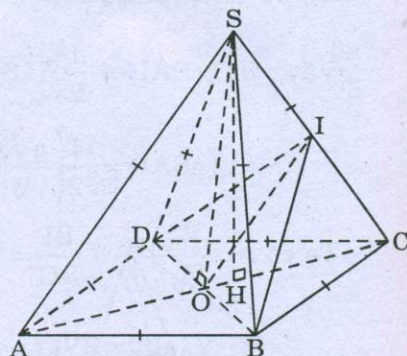
Vậy $BD \perp mp(SAC) \Rightarrow BD \perp SH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SH \perp mp(ABCD)$

$$\Delta SAC \text{ vuông} \Rightarrow AC^2 = SA^2 + SC^2 = a^2 + 1 \Rightarrow SO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2}$$

$$\Delta SOB \text{ vuông} \Rightarrow OB^2 = SB^2 - SO^2 = 1 - \frac{a^2 + 1}{4} = \frac{3 - a^2}{4}$$

$$\Delta SAC \text{ vuông} \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$



$$\begin{aligned} \text{Vậy } V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3}SH \cdot dt(ABCD) = \frac{1}{6}SH \cdot BD \cdot AC \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{3-a^2} = \frac{a\sqrt{3-a^2}}{6}. \end{aligned}$$

Cách 2 : Ta có $V_{S.ABCD} = 2V_{S.DBC}$ mà $\frac{V_{S.DIB}}{V_{S.DCB}} = \frac{SI}{SC} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 4V_{S.DIB} = \frac{4}{3}SI \cdot dt(\triangle IDB) = \frac{2}{3}SI \cdot OI \cdot BD$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3-a^2} = \frac{a\sqrt{3-a^2}}{6} \quad \blacksquare$$

BT7. Tuyển sinh DH khối A 2012

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên mp (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mp (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

- Ta có $\widehat{SCH}$ là góc của SC và $(ABC) \Rightarrow \widehat{SCH} = 60^\circ$

Gọi D là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có : } HD = \frac{a}{6}, \quad CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\triangle SHC \text{ vuông} \Rightarrow SH = HC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

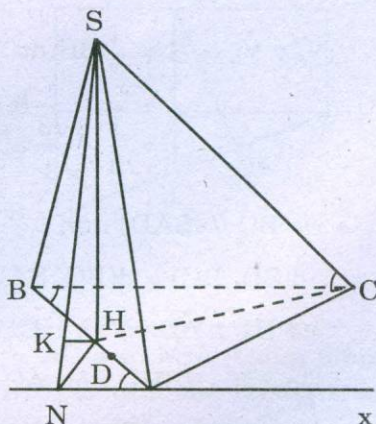
$$\begin{aligned} \text{Vậy } V_{S.ABC} &= \frac{1}{3}SH \cdot dt(\triangle ABC) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}. \end{aligned}$$

- Vẽ $Ax \parallel BC$ thì $d(SA, BC) = d(BC, (SAx))$

Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên Ax và SN .

Ta có $Ax \perp (SHN) \Rightarrow Ax \perp HK$. Vậy $HK \perp (SAN)$.

$$\text{Ta có } AH = \frac{2a}{3}, \quad HN = AH \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



$$\Delta SHN \text{ vuông} \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot NH}{SN} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$$

$$\text{Do đó } d(SA, BC) = d(B, (SAN)) = \frac{3}{2}d(H, (SAN)) = \frac{3}{2}HK = \frac{a\sqrt{42}}{8} \blacksquare$$

* **Lưu ý:** Ta có thể tính HC qua $HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cos 120^\circ$.

BT8. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD hình vuông cạnh $3a$ góc của SA, SB, SC và đáy là 30° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SD và BC.

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABCD) thì SA, SB, SC có hình chiếu vuông góc (ABCD) là HA, HB, HC

$$\text{Vậy } \widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta \perp SAH = \Delta \perp SBH = \Delta \perp SHC$$

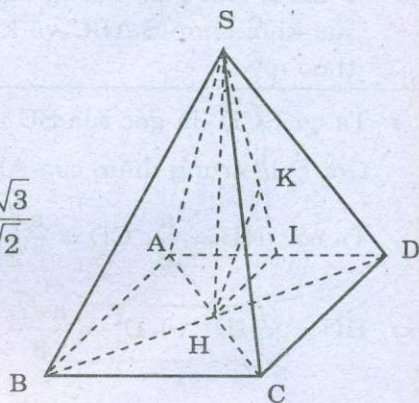
$$\Rightarrow HA = HB = HC$$

$$\Rightarrow H \text{ là tâm } \Delta \perp ABC \text{ (trung điểm AC)}$$

$$\Delta SAH \perp \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{SH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 8H = \frac{AH}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{2\sqrt{3}} = \frac{AB\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{3a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} SH \cdot dt(ABCD) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a^2 = \frac{a^3}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$



- Do $BC \parallel (SAD)$ nên

$$d(SD, BC) = d(BC, SAD) = d(C, SAD) = 2d(H, SAD)$$

$$\text{Vẽ } HI \perp AD \text{ và vẽ } HK \perp SI \quad (1)$$

$$\text{Do } AD \perp (SHI) \text{ nên } AD \perp (HK) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) } \Rightarrow HK \perp (SAD)$$

$$\text{Vậy } d(SD, BC) = HK = \frac{SH \cdot HI}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3a}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{2} + \frac{9a^2}{4}}} = \frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \frac{3a}{\sqrt{10}} \blacksquare$$

BT9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = 2a$, $CD = a$. Góc của hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là 60° . Gọi I là trung điểm AD , biết rằng hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc $mp(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Hai $mp(SBI)$ và (SCI) cùng vuông góc $mp(ABCD)$ nên giao tuyến $SI \perp (ABCD)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } dt(ABCD) &= \frac{AD}{2} (AB + CD) \\ &= \frac{2a}{2} (2a + a) = 3a^2 \end{aligned}$$

Vẽ $IH \perp BC$ thì $SH \perp BC$

Vậy $\widehat{SHI} = 60^\circ$ là góc của hai $mp(SBC)$ và $(ABCD)$

Gọi J và M lần lượt là trung điểm BC và AB

Ta có $\triangle IHJ \sim \triangle CMB$

$$\Rightarrow \frac{IH}{CM} = \frac{IJ}{CB}$$

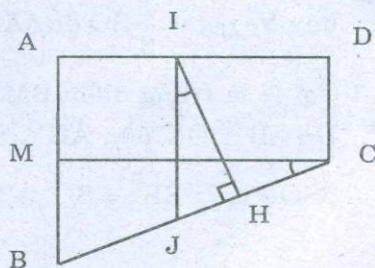
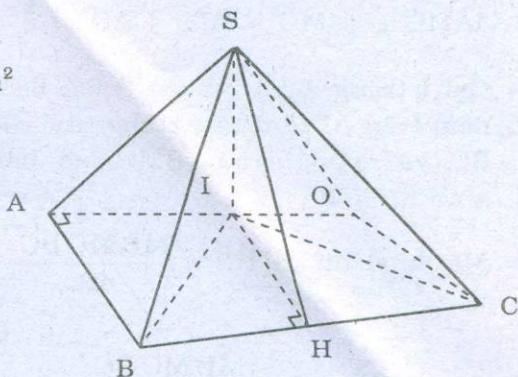
$$\Rightarrow IH = MC \frac{IJ}{BC} = \frac{2a \cdot \frac{3a}{2}}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

$$\triangle SHI \perp \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SI}{IH} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SI = IH \sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot dt(ABCD)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot 3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \blacksquare$$



BT10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ cân, $AB = AC = a$. M là trung điểm AB , hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMC$. Góc của SB và $mp(ABC)$ là 60° . Tính $V_{S.ABC}$ và khoảng cách từ C đến $mp(SAB)$.

Hướng dẫn: + Bài toán này lạ và khó khăn ở chỗ phải dùng diện tích $(\triangle BMC)$ để tính $OB = R$

+ Để tính được $V_{S.ABC}$ và khoảng cách từ C đến (SAB) là bài toán quen thuộc.

- Gọi O là tâm đường tròn (BCM) thì $SO \perp (ABC)$ nên góc của SB và mp(ABC) là $\widehat{SBO} = 60^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } dt(BMC) &= \frac{1}{2} BM \cdot BC \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

$$\Delta AMC \perp \Rightarrow MC^2 = AM^2 + AC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}$$

Gọi I trung điểm BC thì O bất buộc nằm trên AI là đường trung trực của BC và đường tròn (BMC) có bán kính $R = OB$

$$\text{Mặt khác } dt(\Delta BMC) = \frac{MB \cdot MC \cdot BC}{4R}$$

$$\Rightarrow OB = R = \frac{MB \cdot MC \cdot BC}{4dt(\Delta BMC)} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{a^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$\Delta SBC \perp \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SO}{OB} = \sqrt{3} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{4} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{30}}{24}$$

- Gọi N là trung điểm BM thì ON là đường trung trực của BM
Do $AB \perp ON$ nên $AB \perp SN$

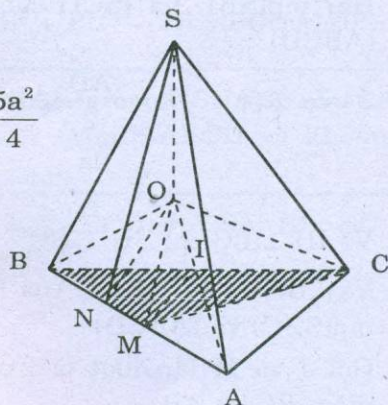
$$\Delta SOB \perp \Rightarrow SB^2 = SO^2 + OB^2 = \frac{30a^2}{16} + \frac{10a^2}{16} = \frac{10a^2}{4}$$

$$\Delta SBN \perp \Rightarrow SN^2 = SB^2 - BN^2 = \frac{10a^2}{4} - \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{39a^2}{16}$$

$$\text{Vậy } dt(\Delta SAB) = \frac{1}{2} SN \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{39}}{4} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{39}}{8}$$

$$\text{Ta có: } V_{S.ABC} = V_{C.SAB} = \frac{1}{3} d(C, SAB) dt(\Delta SAB)$$

$$\Rightarrow d(C, SAB) = \frac{3V}{dt(\Delta SAB)} = \frac{\frac{a^3\sqrt{30}}{24}}{\frac{a^2\sqrt{39}}{8}} = \frac{a\sqrt{30}}{a^2\sqrt{39}} = \frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{13}} \quad \blacksquare$$



BT11. Cho hình chóp S.ABC. Lấy M trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$. Lấy

N trên cạnh SB sao cho $\frac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song SC chia khối chóp làm hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Mặt phẳng (α) song song SC, vậy (α) cắt hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) theo giao tuyến $MK \parallel NH \parallel SC$.

Gọi J là trung điểm SN.

Ta có $MJ \parallel IA \Rightarrow \Delta MJN = \Delta NBI$

N là trung điểm IM, $MJ \parallel AB$

$$\frac{MJ}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MJ = IB = \frac{1}{3}AB$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{V_{A.MKI}}{V_{A.SCB}} &= \frac{AM}{AS} \cdot \frac{AK}{AC} \cdot \frac{AI}{AB} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{I.BNH}}{V_{I.AMK}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IH}{IK} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

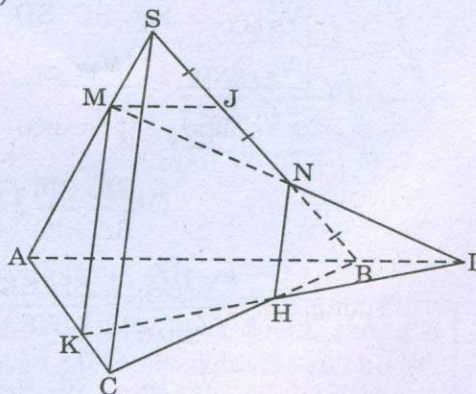
$$\text{Do đó } V_{I.BNH} = \frac{1}{16} V_{I.AMK} = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{27} V_{A.SCB} = \frac{1}{27} V_{A.SCB}$$

Gọi $V_1 = V_{AMK.BNH}$

$$\text{Ta có } V_1 = V_{I.AMK} - V_{I.BNH} = \frac{16}{27} V_{S.ABC} - \frac{1}{27} V_{S.ABC} = \frac{15}{27} V_{S.ABC} = \frac{5}{9} V_{S.ABC}$$

$$V_2 = V_{S.ABC} - V_1 = \frac{4}{9} V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4} \quad \blacksquare$$



BT12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N. Chứng minh :

a) $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD}$.

b) $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$.

a) Dễ dàng thấy :

$$dt(\Delta ABC) = dt(\Delta ACD) = dt(\Delta ABD) = dt(\Delta BCD) = \frac{1}{2} dt(ABCD)$$

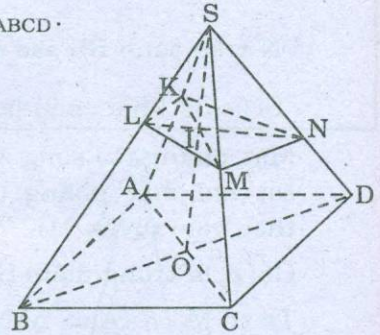
và các khối chóp của đề toán có cùng chiều cao $h = d(S, (ABCD))$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}.$$

b) Ta có : $\frac{V_{S.LKM}}{V_{S.BAC}} = \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SM}{SC}$

$$\frac{V_{S.KMN}}{V_{S.ACD}} = \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{V_{S.LKNM}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} &= \frac{V_{S.LKM}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.KMN}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} \\ &= \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \left(\frac{SL}{SB} + \frac{SN}{SD} \right) \end{aligned} \quad (1)$$



Tương tự : $\frac{V_{S.LKN}}{V_{S.BAD}} = \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SN}{SD}$

$$\frac{V_{S.LMN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.LKNM}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.LKN}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} + \frac{V_{S.LMN}}{\frac{1}{2} V_{S.ABCD}} = \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \left(\frac{SK}{SA} + \frac{SM}{SC} \right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \left(\frac{SL}{SB} + \frac{SN}{SD} \right) = \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \left(\frac{SK}{SA} + \frac{SM}{SC} \right)$

Nhân hai vế với $\frac{SA \cdot SB \cdot SC \cdot SD}{SK \cdot SL \cdot SM \cdot SN}$ ta được :

$$\frac{SB}{SL} \cdot \frac{SD}{SN} \cdot \left(\frac{SL}{SB} + \frac{SN}{SD} \right) = \frac{SA}{SK} \cdot \frac{SC}{SM} \cdot \left(\frac{SK}{SA} + \frac{SM}{SC} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{SD}{SN} + \frac{SB}{SL} = \frac{SC}{SM} + \frac{SA}{SK} \quad \blacksquare$$

BT13. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O, đường kính AB = 2R.

Trên đường vuông góc mặt phẳng (P) tại O lấy điểm S sao cho $SO = R\sqrt{3}$;

lấy I trên đoạn SO sao cho $SI = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc

của I lên SM với M là điểm bất kì trên (C). Xác định vị trí điểm M sao cho thể tích tứ diện H.AMB lớn nhất.

Tứ giác IHMO nội tiếp trong đường tròn

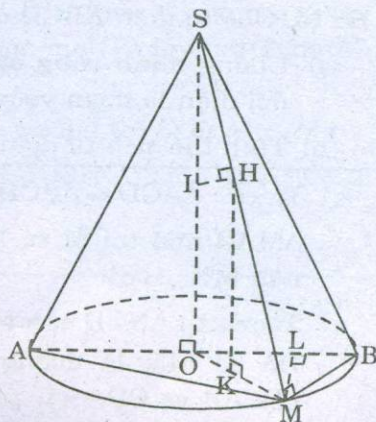
$$\Rightarrow SI \cdot SO = SH \cdot SM \Rightarrow SH = \frac{\frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot R\sqrt{3}}{\sqrt{3R^2 + R^2}} = R$$

Do $SH = \frac{1}{2}SM$ nên H là trung điểm SM.

Vẽ $HK \parallel SO$ và $ML \perp AB$

$$\begin{aligned} V_{H.AMB} &= \frac{1}{3} HK \cdot dt(\triangle AMB) \\ &= \frac{R\sqrt{3}}{6} \cdot dt(\triangle AMB) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{6} ML \cdot AB = \frac{R^2\sqrt{3}}{6} LM \leq \frac{R^2\sqrt{3}}{4} MO \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MO \perp AB \Leftrightarrow M$ là trung điểm $\widehat{AB}$ ■



BT14. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại O lấy điểm S sao cho $SO = R\sqrt{3}$. Lấy M di động trên đường tròn (O, R). Gọi H là trung điểm SM. Tìm M trên đường tròn (O, R) sao cho hình chóp H.AMB có thể tích lớn nhất.

Trong mp (SOM) vẽ $HK \parallel SO$

Do $SO \perp mp(MAB) \Rightarrow HK \perp mp(MAB)$

$$\text{và } HK = d(H, mp(MAB)) = \frac{SO}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

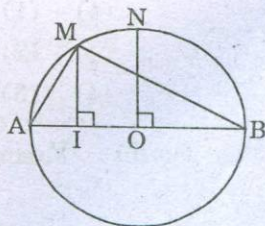
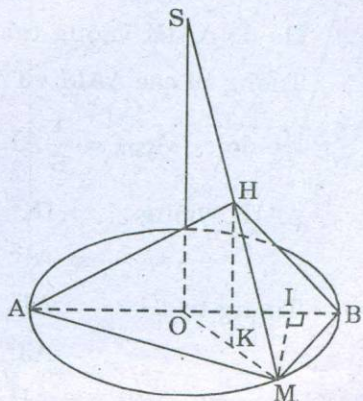
Vẽ đường cao MI trong $\triangle MAB$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } V_{H.MAB} &= \frac{1}{3} HK \cdot dt(\triangle MAB) \\ &= \frac{1}{6} HK \cdot MI \cdot AB \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right) (2R) MI = \frac{R^2\sqrt{3}}{6} MI \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{H.MAB} \leq \frac{R^2\sqrt{3}}{6} \cdot R \quad (\text{do } MI \leq ON = R)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv N$ là điểm chính giữa $\widehat{AB}$.

Vậy $V_{\max} = \frac{R^3\sqrt{3}}{6}$ khi M là điểm chính giữa $\widehat{AB}$ ■



BT15. Cho tứ diện ABCD có $AD = BC = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$.

a) Chứng minh rằng các đoạn thẳng nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện là đoạn vuông góc chung của các cặp cạnh đó.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD theo a, b, c .

a) Ta có : $\triangle ACD = \triangle BCD$ (c.c.c) nên $AM = BM$.

$\triangle MAB$ nên tại M có NM là trung tuyến nên $MN \perp AB$.

Tương tự $\triangle NCD$ cân tại N nên $MN \perp CD$
Do đó MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

Hai đường vuông góc còn lại chứng minh tương tự.

b) Từ ba đỉnh của $\triangle BCD$ vẽ ba đường thẳng song song các cạnh tam giác, ba đường này tạo $\triangle IJK$ (xem hình).

$$\text{Do } dt(\triangle IJK) = 4dt(\triangle BCD) \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{AIJK}$$

Ta có $BC = DI = DK$ mà $BC = AD = a$

nên $DA = DI = DK$

Do đó $\triangle AIK$ vuông tại A.

Tương tự các $\triangle AIJ$ và $\triangle AJK$ cũng vuông tại A

$$\text{Do đó : } V_{AIJK} = \frac{1}{6} AI \cdot AJ \cdot AK$$

$$\triangle AIK \text{ vuông} \Rightarrow IK^2 = AI^2 + AK^2$$

$$\Rightarrow AI^2 + AK^2 = 4BC^2 = 4a^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } AI^2 + AJ^2 = 4CD^2 = 4c^2 \quad (2)$$

$$AJ^2 + AK^2 = 4BD^2 = 4b^2 \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow AI^2 + AJ^2 + AK^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \quad (4)$$

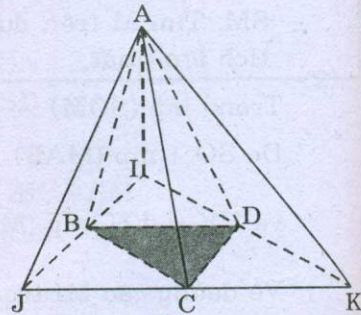
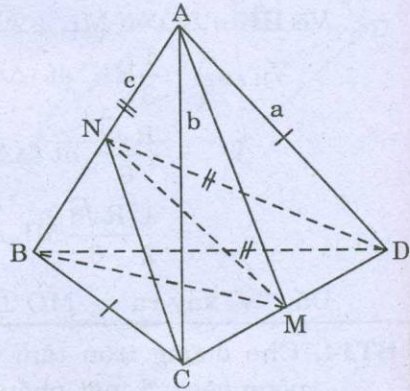
$$(4) - (1) \Rightarrow AJ^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$(4) - (2) \Rightarrow AK^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$(4) - (3) \Rightarrow AI^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2)$$

$$\text{Do đó : } V_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{AIJK} = \frac{1}{24} AI \cdot AJ \cdot AK$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{b^2 + c^2 - a^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2 - b^2} \quad \blacksquare$$



BT16. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD có tâm O, cạnh a. Trên tia Ax, Cy ở về cùng một phía và vuông góc mp (P) lấy hai điểm M, N. Đặt AM = x, CN = y.

- a) Chứng minh điều kiện cần và đủ để $\triangle OMN$ vuông tại O là $a^2 = 2xy$.
 b) Giả sử M, N thay đổi sao cho $\triangle OMN$ vuông tại O. Tính thể tích tứ diện B.DMN. Xác định x, y để $V_{B.DMN} = \frac{a^3}{4}$.

a) Trên mp (Ax, Cy) vẽ MH // AC.

$$\triangle MHN \text{ vuông tại H} \Rightarrow MN^2 = MH^2 + NH^2 = 2a^2 + |y - x|^2$$

$$\triangle OMN \text{ vuông tại O} \Leftrightarrow MN^2 = OM^2 + ON^2$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = (AM^2 + OA^2) + (OC^2 + CN^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + (y - x)^2 = x^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + y^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2xy$$

b) Ta có : $BD \perp AC$ và $BD \perp MA \Rightarrow BD \perp \text{mp (MNCA)}$
 $\Rightarrow BD \perp MO$ (1)

Mà $MO \perp ON$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow OM \perp \text{mp (BDN)}$

Ta có : $\triangle NBC = \triangle NCD \Rightarrow NB = ND$

$$\text{Do đó : } dt(\triangle NBD) = \frac{1}{2} NO \cdot BD$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{2} + y^2} \cdot a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V_{M.NBD} = \frac{1}{3} OM \cdot dt(\triangle NBD)$$

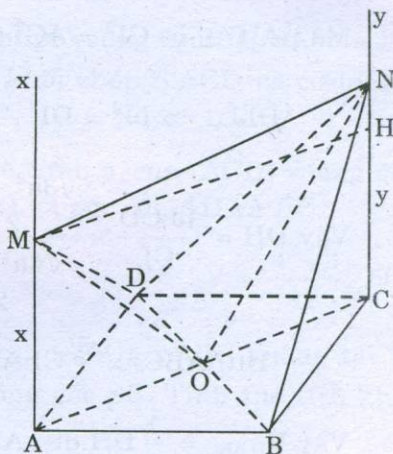
$$\Rightarrow V_{M.NBD} = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{y^2 + \frac{a^2}{2}}$$

Mà $xy = \frac{a^2}{2}$ nên

$$V_{M.NBD} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \sqrt{x^2 + xy} \cdot \sqrt{y^2 + yx} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \sqrt{xy(x+y)^2} = \frac{a^2}{6} (x+y)$$

$$\text{Ta có : } V_{M.NBD} = \frac{a^3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{a^2}{2} \\ \frac{a^2}{6}(x+y) = \frac{a^3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3}{2}a \\ xy = \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \frac{a}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = a \end{cases} \blacksquare$$



BT17. Cho tứ diện ABCD có AB = x còn tất cả các cạnh còn lại đều bằng a.
 Tìm x để thể tích khối ABCD đạt giá trị lớn nhất.

Gọi I là trung điểm AB

$\triangle SAB$ và $\triangle CAB$ cân

$\Rightarrow DI \perp AB$ và $CI \perp AB$

Vẽ $DH \perp CI$ (1)

Do $AB \perp (DIC) \Rightarrow AB \perp DH$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow DH \perp (ABC)$

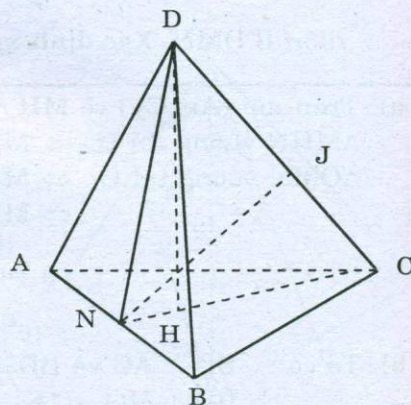
Gọi J là trung điểm CD

Do $\triangle DAB = \triangle CAB$ nên $ID = IC$

$\Rightarrow IJ \perp CD$

Ta có $dt(\triangle DIC) = \frac{1}{2} DH \cdot CI = \frac{1}{2} IJ \cdot CD$

$$\Rightarrow DH = \frac{IJ \cdot CD}{CI}$$



$$\text{Mà } \triangle AIC \perp \Rightarrow CI^2 = AC^2 - AI^2 = a^2 - \frac{x^2}{4} = DI^2$$

$$\triangle DIJ \perp \Rightarrow IJ^2 = DI^2 - DJ^2 = a^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4}$$

$$\text{Vậy } DH = \frac{IJ \cdot CD}{CI} = \frac{\frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \cdot a}{\frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}} = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}} a$$

$$Dt(\triangle ABC) = \frac{1}{2} CI \cdot AB = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 - x^2} \cdot x$$

$$\text{Vậy } V_{D.ABC} = \frac{1}{3} DH \cdot dt(\triangle ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3a^2 - x^2} \cdot ax$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{1}{144} a^2 x^2 (3a^2 - x^2) \leq \frac{a^2}{144} \left[\frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2} \right]^2 = \left(\frac{a^3}{8} \right)^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Do đó } V_{DABC} \max = \frac{a^3}{8} \text{ khi } x = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), $\widehat{BAC} = 120^\circ$, ΔSBC đều cạnh a. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

$$\text{ĐS : } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}.$$

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = 3a$, $AD = CD = a$, SA vuông góc mp (ABCD), SC tạo với đáy góc $\frac{\pi}{4}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

$$\text{ĐS : } V = \frac{a^3\sqrt{8}}{3}.$$

3. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), M là trung điểm của SC, ΔABC vuông cân tại B, $BA = a$. Góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABM.

4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, SA vuông góc mp (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ACD và cosin góc của SB và AC.

5. Cho tứ diện ABCD có ΔABC và ΔABD đều cạnh a, mp (ACD) vuông góc mp (BCD). Tính thể tích khối chóp A.BCD và góc của AD và BC.

$$\text{ĐS : } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}; 60^\circ.$$

6. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp (ABC), ΔABC vuông tại B, $SA = 2a\sqrt{3}$, $BC = a$, $AC = 2a$. Vẽ AH vuông góc SB. Tính thể tích khối chóp H.ABC.

$$\text{ĐS : } V = \frac{a^3}{5}.$$

7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mp (SAB) vuông góc mp (ABCD), $SA = SB$, góc của SC và mp (ABCD) bằng 45° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

$$\text{ĐS : } V = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}.$$

8. Cho ΔOAB có $OA = OB = 2a$, $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Trên đường thẳng d vuông góc mp (OAB) tại O lấy hai điểm C, D về hai phía sao cho ΔABC vuông tại C, ΔABD đều. Tính thể tích khối chóp A.BCD.

9. Cho hình chóp S.ABC có góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60° , ΔABC và ΔSBC đều cạnh a. Tính khoảng cách từ B đến mp (SAC).

$$\text{ĐS : } \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

10. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy góc φ ($0 < \varphi < 90^\circ$). Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ A đến mp (SBC).
11. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = 3a$, ΔABC vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến mp (SBC).
12. Cho hình chóp S.ABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc, $SA = SB = SC = a$. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Gọi D là điểm đối xứng của S qua E, gọi I là giao điểm của AD và mp (SMN). Chứng minh AI vuông góc SI. Tính thể tích khối chóp M.BIS.

$$\text{ĐS : } V = \frac{a^3}{36}.$$

13. Cho hình chóp S.ABCD có $SA = a$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh SA vuông góc SC. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
14. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên đường thẳng d vuông góc mặt phẳng chứa đường tròn tâm O lấy điểm S sao cho $SO = R\sqrt{3}$. Lấy M di động trên (O). Gọi H là trung điểm của SM. Tìm M thuộc (O) sao cho thể tích khối chóp H.AMB lớn nhất.
15. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC đều cạnh a, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 45^\circ$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC. Vẽ SH vuông góc AI. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ I đến mp (SAB).

$$\text{ĐS : } V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}; d = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

16. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC cân, $AB = AC = a$, mp (SBC) vuông góc mp (ABC) và $SA = SB = a$.
- a) Chứng minh ΔSBC vuông.
- b) Biết $SC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABC.
17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. Gọi B', D' là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD.
- a) Tìm giao điểm C' của SC và mp (AB'D').
- b) Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'.
18. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy 2a, chiều cao $a\sqrt{2}$. Gọi

E là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) qua AE và song song BD cắt SB, SD lần lượt tại M, N. Tính thể tích khối chóp S.AMEN.

19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SC vuông góc mp (ABCD), $SC = 2a$. Lấy hai điểm M, N lần lượt trên SB, SD sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = 2$. Mp (AMN) cắt SC tại K. Tính thể tích khối chóp S.AMNK.
20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, $SA = a$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ D đến mp (SBC).
21. Cho hình chóp S.ABC có $\triangle ABC$ vuông cân tại A, $AB = a$, mp (SBC) vuông góc mp (ABC). Hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng tạo với đáy góc 45° . Tính thể tích khối chóp S.ABC.
22. Cho tứ diện ABCD có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$. Khoảng cách từ B đến mp (BCD) bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Tính góc của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) biết thể tích khối tứ diện bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

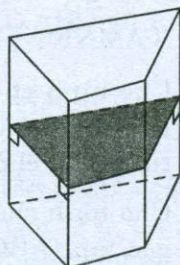
THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B , chiều cao h là :

$$V = Bh$$

$$S_{\text{xung quanh}} = pl$$

p : chu vi thiết diện thẳng; l : cạnh bên.



Dạng 1. LĂNG TRỤ ĐỨNG ĐÁY TAM GIÁC

BT1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a , BC' tạo với mặt bên $(ABB'A')$ một góc $\frac{\pi}{6}$. Tính theo a thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Gọi I' là trung điểm $A'B'$.

$\Delta A'B'C'$ đều $\Rightarrow C'I' \perp A'B'$

Mà $BB' \perp mp(A'B'C') \Rightarrow BB' \perp C'I'$

Vậy $C'I' \perp mp(AA'B'B)$

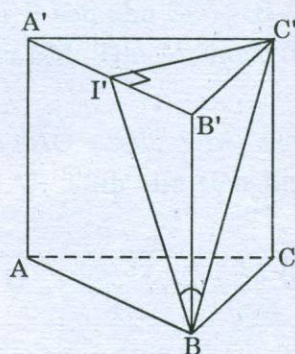
Do đó BI' là hình chiếu vuông góc của BC' lên $mp(ABB'A')$.

Vậy $\widehat{I'BC'} = \frac{\pi}{6}$

$$\Delta C'I'B \text{ vuông tại } I' \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{d}{h} = \frac{C'I'}{BC'} \Rightarrow BC' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = a\sqrt{3}$$

$$\Delta BCC' \text{ vuông} \Rightarrow CC'^2 = BC'^2 - BC^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2$$

$$\text{Do đó : } V_{\text{lăng trụ}} = Bh = CC' \cdot dt(\Delta ABC) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4} \quad \blacksquare$$



BT2. Tuyển sinh Cao đẳng 2013

Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $A'B$ tạo đáy góc 60° . Gọi M , N là trung điểm AC và $B'C'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và độ dài đoạn MN .

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là Δ đều ABC .

• $A'B$ có hình chiếu vuông góc lên (ABC) là AB

Vậy góc của $A'B$ và (ABC) là $\widehat{A'BA} = 60^\circ$

$$\Delta A'BA \perp \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{A'A}{AB} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A'A = a\sqrt{3}$$

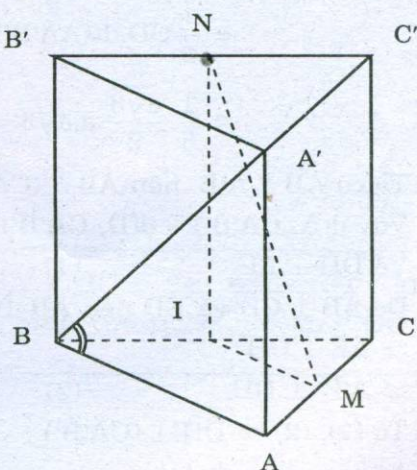
Vậy $V_{LT} = A'A \cdot dt(\Delta ABC)$

$$= a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$$

• Gọi I trung điểm BC thì $IN \perp (ABC)$

$$\Delta NIM \perp \Rightarrow MN^2 = IN^2 + IM^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2} \quad \blacksquare$$



BT3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc của BC' và $mp(ABB'A')$ là 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Gọi I trung điểm $A'B'$

$\Delta A'B'C'$ đều nên $C'I \perp A'B'$ (1)

Mà $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp C'I$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow C'I \perp (ABB'A')$

Vậy BI là hình chiếu vuông góc của BC' lên $mp(ABB'A')$

Do đó $\widehat{IBC'} = 30^\circ$ là góc của BC' và $mp(ABB'A')$

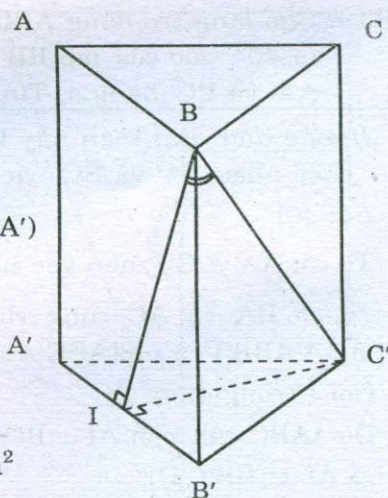
$$\Delta BIC' \perp \text{ tại } I \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{C'I}{BI} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BI = C'I \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$

$$\Delta BB'I \perp \Rightarrow B'B^2 = BI^2 - IB'^2 = \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2$$

Do đó $V_{LT} = BB' \cdot dt(\Delta ABC)$

$$= a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4} \quad \blacksquare$$



BT4. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy a , cạnh bên $a\sqrt{3}$. Gọi D và E là trung điểm AB và $A'B'$. Tính thể tích khối chóp $A.BA'B'C$ và khoảng cách từ A đến $mp(CEB')$.

Ta có: $CD \perp AB$ và $AA' \perp CD$ nên $CD \perp (A'B'BA)$

Vậy $V_{A.BA'B'C} = V_{C.AA'B'B}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} CD \cdot dt(AA'B'B) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2} \end{aligned}$$

Ta có $AB \parallel A'B'$ nên $AB \parallel (CA'B')$

Vậy $d(A, CA'B') = d(D, CA'B')$

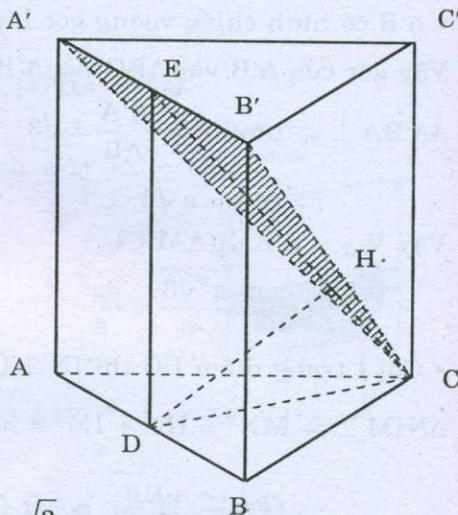
Vẽ $DH \perp EC$ (1)

Do $AB \perp CD$ và ED nên $AB \perp (EDC)$

$\Rightarrow AB \perp DH$

$\Rightarrow A'B' \perp DH$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow DH \perp (CA'B')$



$$\text{Vậy } d(A, CEB') = DH = \frac{ED \cdot CD}{EC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{3a}{\sqrt{15}} \quad \blacksquare$$

BT5. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy $\triangle ABC$ cân tại A, góc AA' và BC' là 30° , góc của mp($BB'A'A$) và mp($ACC'A'$) là 120° , khoảng cách của AA' và BC' bằng a. Tính thể tích khối lăng trụ.

Hướng dẫn: Bài toán này khó khăn ở giả thiết khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau AA' và BC' các bạn nên xem lại kỹ ở chủ đề 22.

Bài giải

Ta có: $AA' \parallel CC'$ nên góc của AA' và BC' là $\widehat{BC'C} = 30^\circ$

Ta có BA và AC cùng vuông góc AA' nên $\widehat{BAC} = 120^\circ$ là góc của hai mp($A'ABB'$) và mp($ACC'A'$)

Gọi I trung điểm BC

Do $\triangle ABC$ cân nên $AI \perp BC$

$\Rightarrow AI \perp (BB'C'C)$

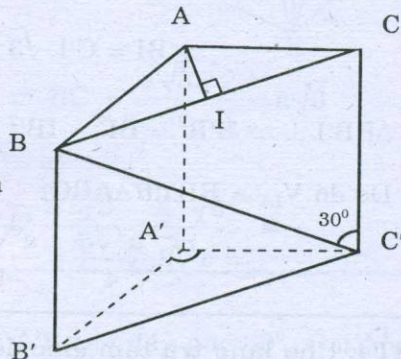
Mp($BB'C'C$) chứa BC' và song song AA' nên

$$\begin{aligned} d(AA', BC') &= d(AA', BB'C'C) \\ &= d(A, BB'C'C) = AI = a \end{aligned}$$

$$\triangle ABI \perp \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AB = 2AI = 2a$$

$$\text{Và } BI^2 = AB^2 - AI^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$



$$\Rightarrow BC = 2BI = 2a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } dt(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AI \cdot BC = \frac{1}{2} a (2a\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}$$

$$\triangle BCC' \perp \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{BC}{CC'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow CC' = BC\sqrt{3} = 2a\sqrt{3}(\sqrt{3}) = 6a$$

$$\text{Do đó: } V_{LT} = CC' dt(\triangle ABC) = 6a^3\sqrt{3}. \blacksquare$$

BT6. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BA = BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Mặt phẳng $(B'AC)$ tạo $mp(ABC)$ góc 60° . Tính thể tích khối lăng trụ và khoảng cách từ B đến $mp(B'AC)$.

- Gọi I trung điểm AC

$$\triangle BAC \text{ cân tại } B \Rightarrow BI \perp AC$$

$$\Rightarrow B'I \perp AC$$

Vậy $\widehat{BIB'} = 60^\circ$ là góc của hai $mp(B'AC)$ và (ABC)

$$\text{Ta có } \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$$

$$\triangle ABI \perp \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{BI}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BI = a$$

$$\triangle B'BI \perp \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{BB'}{BI} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BB' = a\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} Dt(\triangle BAC) &= \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{Lt} = a\sqrt{3} \cdot a^2\sqrt{3} = 3a^3$$

- Vẽ $BH \perp B'I$

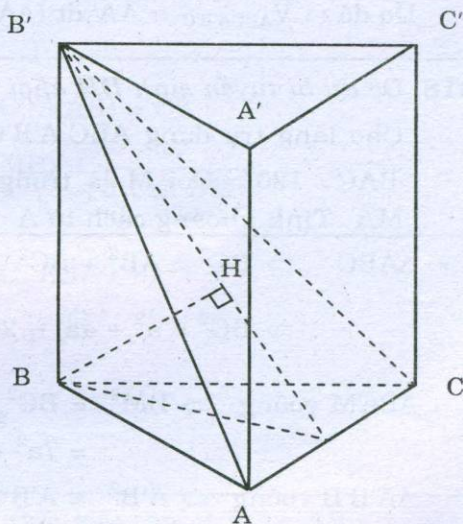
(1)

$$\text{Do } AC \perp (BB'I) \Rightarrow AC \perp BH$$

(2)

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow BH \perp (B'AC)$$

$$\text{Vậy } BH = d(B, (B'AC)) = \frac{BB' \cdot BI}{B'I} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \blacksquare$$



BT7. Cho một lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{ACB} = \alpha$. Tính theo a và α thể tích của lăng trụ, biết diện tích xung quanh của nó bằng tổng diện tích hai đáy.

Vẽ $AH \perp BC$.

$$\triangle AHC \text{ vuông} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AH}{AC} \text{ và } \cos \alpha = \frac{HC}{AC}$$

$$\Rightarrow AH = a \sin \alpha \text{ và } BC = 2HC = 2a \cos \alpha$$

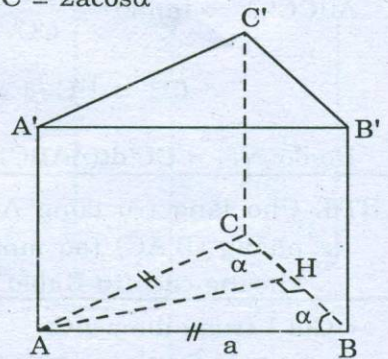
$$\begin{aligned} \text{Do đó: } dt(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} AH \cdot BC \\ &= \frac{1}{2} (a \sin \alpha)(2a \cos \alpha) \\ &= \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{xq} &= (AB + AC + BC)AA' \\ &= (2a + 2a \cos \alpha)AA' \end{aligned}$$

$$\text{Mà: } S_{xq} = 2dt(\triangle ABC) \Rightarrow 2a(1 + \cos \alpha)AA' = a^2 \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow AA' = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\text{Do đó: } V_{ABCA'B'C'} = AA' \cdot dt(\triangle ABC) = \frac{a^3}{4} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{1 + \cos \alpha} \blacksquare$$



BT8. Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối A 2007

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm CC' . Chứng minh MB vuông góc MA' . Tính khoảng cách từ A đến mp $(A'BM)$.

$$\bullet \triangle ABC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2 = a^2 + 4a^2 - 2(a)(2a)\left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

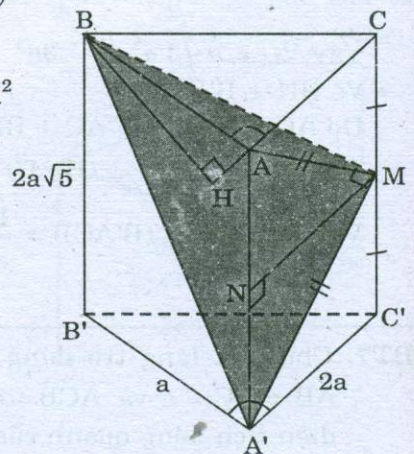
$$\begin{aligned} \triangle BCM \text{ vuông} &\Rightarrow BM^2 = BC^2 + MC^2 \\ &= 7a^2 + 5a^2 = 12a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle A'B'B \text{ vuông} &\Rightarrow A'B'^2 = A'B^2 + BB'^2 \\ &= a^2 + 20a^2 \\ &= 21a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle A'MC' \text{ vuông} &\Rightarrow A'M^2 = A'C'^2 + MC'^2 \\ &= 4a^2 + 5a^2 = 9a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } A'B^2 = A'M^2 + MB^2$$

nên $\triangle BMA'$ vuông tại $M \Rightarrow MB \perp MA'$



• *Cách 1:*

Vẽ $BH \perp AC$

Ta có $BH \perp AC$ và AA' nên $BH \perp mp (AMA')$

$$\Delta BHA \text{ vuông} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Gọi N là trung điểm AC .

$\Delta HMA'$ cân tại M nên $MN \perp AA'$

$$\text{Vậy } dt(\Delta MAA') = \frac{1}{2} MN \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{5} = 2a^2\sqrt{5}$$

$$\text{Do đó: } V_{B.AMA'} = \frac{1}{3} BH \cdot dt(\Delta MAA') = \frac{a\sqrt{3}}{3} a^2\sqrt{5} = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$$

Gọi h là khoảng cách từ A đến $mp (BMA')$.

$$\text{Ta có: } V_{A.BMA'} = V_{B.AMA'} = \frac{1}{3} h \cdot dt(BMA')$$

$$\Rightarrow h = \frac{3V_{B.AMA'}}{dt(\Delta BMA')} = \frac{a^3\sqrt{15}}{\frac{1}{2} BM \cdot MA'} = \frac{2a^3\sqrt{15}}{(2a\sqrt{3}) \cdot 3a} = \frac{a}{3}\sqrt{5}$$

• *Cách 2:*

Vẽ $CK \perp AB$ thì $CK \perp (A'AB)$

Do $MC \parallel (A'AB)$ nên $d(M, AA'B) = a(C, A'AB) = CK$

$$\Rightarrow V_{M.AA'B} = \frac{1}{3} CK \cdot dt(A'AB) \Rightarrow d(A, A'MB) = \frac{3V}{dt(\Delta A'BM)}$$

• *Cách 3:*

Do $MC \parallel (A'AB)$ nên $d(M, A'BA) = d(C, ABA')$

$$V_{M.A'AB} = V_{C.AA'B} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} 2a\sqrt{5} \cdot a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } d(A, (A'MB)) = \frac{3V}{dt(MA'B)} \quad \blacksquare$$

BT9. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác cân có $BC = AB = a$, góc

$\widehat{BAC} = \alpha$. Mặt phẳng $(BA'C')$ tạo với đáy lăng trụ một góc $\beta = \frac{\pi}{6}$.

a) Tính thể tích lăng trụ theo a, α .

b) Tính khoảng cách từ B' đến $mp (BA'C')$.

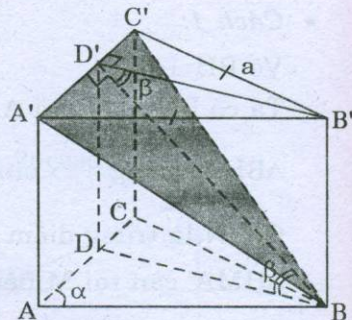
a) Gọi D, D' là trung điểm của AC và $A'C'$ thì DD' là đường cao của lăng trụ, $B'D' \perp A'C'$; $BD' \perp A'C' \Rightarrow \widehat{BD'B'} = \widehat{DBD'} = \frac{\pi}{6}$

Diện tích đáy lăng trụ :

$$B = \frac{1}{2}a^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha$$

$$\text{Đường cao} = DD' = BD \tan \frac{\pi}{6} = a \sin \alpha \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3 \sin 2\alpha \sin \alpha.$$



b) Vì thiết diện tạo với đáy góc β nên ta có :

$$dt(\Delta BA'C') = \frac{S_{\text{đáy}}}{\cos \beta} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2 \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Ta có : } V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18} \sin 2\alpha \sin \alpha$$

$$V_{B.A'B'C'} = V_{B'.A'BC'} = \frac{1}{3} h \cdot dt(\Delta A'BC') \text{ với } h = d(B', (A'BC'))$$

$$\Rightarrow h = \frac{3V_{B.A'B'C'}}{dt(\Delta A'BC')} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{3}}{6} \sin 2\alpha \sin \alpha}{\frac{a^2 \sin 2\alpha}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{2} \sin \alpha \quad \blacksquare$$

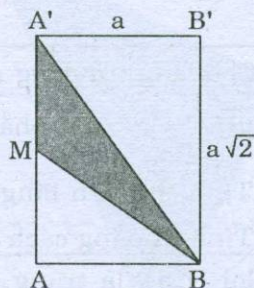
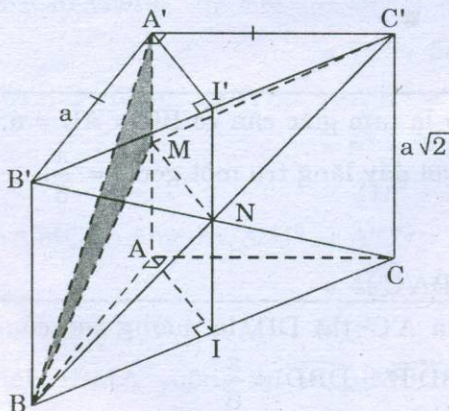
BT10. Đề dự bị ĐH khối D 2007

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông $AB = AC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AA' và BC' . Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA' và BC' . Tính thể tích khối $M.A'BC'$.

- Gọi I, I' lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$.

Ta có : $AI \perp BC$ và $BB' \Rightarrow AI \perp (BB'C'C) \Rightarrow AI \perp BC'$

Mà $MN \parallel AI \Rightarrow MN \perp BC'$ (1)



Mặt khác : $AA' \perp AI \Rightarrow AA' \perp MN$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MN$ là đường vuông góc chung của AA' , BC' .

- Ta có : $A'C' \perp A'B'$ và $AA' \Rightarrow A'C' \perp (MA'B)$

$$\text{Ta có : } dt(\Delta A'MB) = \frac{1}{2}BA \cdot A'M = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Do đó : } V_{C'.A'BM} = \frac{1}{3}A'C' \cdot dt(\Delta MA'B) = \frac{1}{3}a \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \quad \blacksquare$$

BT11. Đề dự bị ĐH khối B 2006

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Các mặt phẳng (ABC') , $(A'BC)$, $(AB'C)$ đồng quy tại O . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mp (ABC) .

- Chứng minh H là trọng tâm ΔABC .
- Tính thể tích tứ diện $O.ABC$ theo V .

- Gọi I là giao điểm của $A'C$ và AC' thì

$$(A'BC) \cap C'AB = BI$$

- Gọi J là giao điểm của $A'B$ và AB' thì

$$(A'BC) \cap (B'AC) = CJ$$

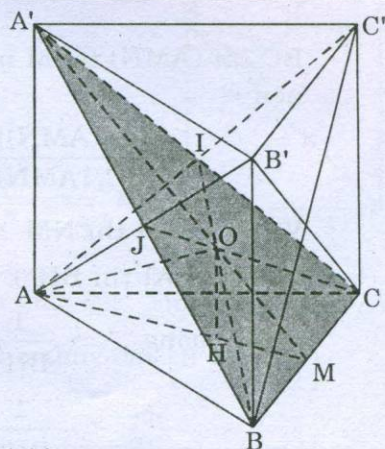
Trong $(A'BC)$, CJ cắt BI tại O trọng tâm $\Delta A'BC$, $A'O$ cắt BC tại trung điểm M .

Trong mp $(A'AM)$ vẽ $OH \parallel AA'$ thì

$$OH \perp (ABC)$$

$$\text{Ta có : } \frac{MH}{MA} = \frac{MO'}{MA'} = \frac{OH}{AA'} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow H \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \text{ và } MH = \frac{1}{3}AA'.$$



- Ta có : $V_{O.ABC} = \frac{1}{3}OH \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{9}AA' \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{9}V \quad \blacksquare$

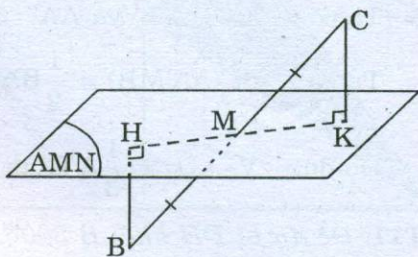
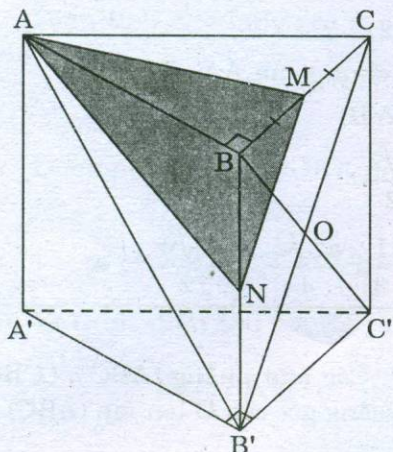
BT12. Đề tuyển sinh ĐH khối D 2008

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B với $BA = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm BC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách hai đường thẳng AM và $B'C$ theo a .

- Ta có : $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot dt(\Delta ABC) = a\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}BA^2\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

- Gọi N là trung điểm BB' . Ta có : $MN \parallel B'C$.

Vậy (AMN) là mặt phẳng chứa MN và song song $B'C$.



Do đó : $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN))$
 $= d(C, (AMN))$

BC cắt (AMN) tại M mà M là trung điểm BC
 nên :

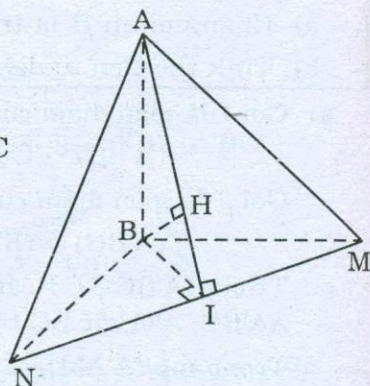
$$\frac{d(C, (AMN))}{d(BC, (AMN))} = \frac{CK}{BH} = \frac{MC}{MB} = 1.$$

Vẽ $BI \perp NM$ thì $NM \perp (ABI)$.

Vẽ $BH \perp AI$ thì $BH \perp (ANM)$.

$$\begin{aligned} \Delta ABI \text{ vuông} &\Rightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

Vậy $d(AM, B'C) = BH = \frac{a}{\sqrt{7}}$ ■



BT13. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng (ABC') tạo với mặt bên $(BCC'B')$ một góc α . Gọi I, J là hình chiếu của A lên BC và BC' .

a) Chứng minh $\widehat{AJI} = \alpha$.

b) Tính theo a, α thể tích khối lăng trụ.

a) Ta có : $AI \perp BC$ và $CC' \perp$ mp $(BB', CC') \Rightarrow AI \perp BC'$

Ta có : $BC' \perp AI$ và $AJ \perp BC'$ nên $BC' \perp$ mp $(AIJ) \Rightarrow BC' \perp IJ$

Vậy $\widehat{AJI} = \alpha$.

b) Ta có : $AI \perp$ mp $(BB', CC') \Rightarrow AI \perp IJ$

$$\Delta AIJ \text{ vuông tại } I \Rightarrow \cot \alpha = \frac{k}{d} = \frac{IJ}{AI}$$

$$\Rightarrow IJ = AI \cot \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cot \alpha$$

$$\text{Ta có } \Delta BIJ \sim \Delta BC'C \Rightarrow \frac{BI}{BC'} = \frac{IJ}{C'C}$$

$$\Rightarrow C'C^2 = \frac{BC'^2 \cdot IJ^2}{BI^2} = \frac{(CC'^2 + a^2) \cdot \frac{3a^2}{4} \cot^2 \alpha}{\frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow C'C^2 = (CC'^2 + a^2) 3 \cot^2 \alpha$$

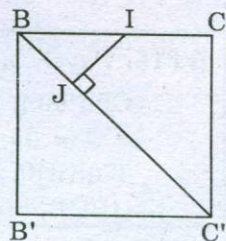
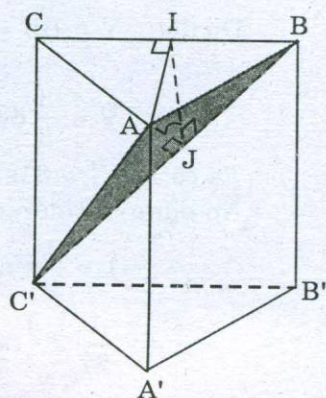
$$\Rightarrow (1 - 3 \cot^2 \alpha) C'C^2 = 3a^2 \cot^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{3}{\tan^2 \alpha}\right) C'C^2 = \frac{3a^2}{\tan^2 \alpha} \Rightarrow (\tan^2 \alpha - 3) C'C^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow C'C^2 = \frac{3a^2}{\tan^2 \alpha - 3}$$

$$\text{Vậy } V_{\text{lăng trụ}} = Bh = C'C \cdot dt(\Delta ABC)$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2 \alpha - 3}} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4\sqrt{\tan^2 \alpha - 3}} \blacksquare$$



BT14. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích bằng $\sqrt{3}$ và tạo mặt đáy một góc α thay đổi $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Tìm α để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.

Gọi I trung điểm AB .

ΔABC đều $\Rightarrow CI \perp AB$

$\Delta C'AB$ cân tại $C' \Rightarrow C'I \perp AB$

Vậy $\widehat{CIC'} = \alpha$.

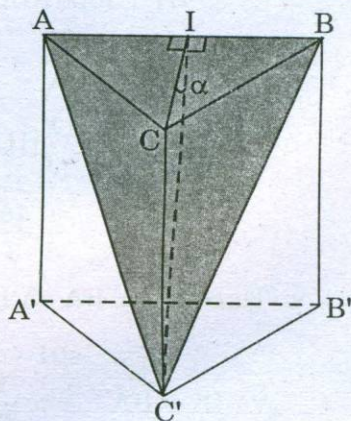
Gọi x là cạnh của ΔABC .

Ta có : $dt(\Delta ABC) = dt(\Delta ABC') \cos \alpha$

$$\Rightarrow \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \cos \alpha \Rightarrow x^2 = 4 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{\cos \alpha}$$

$$\Delta CIC' \text{ vuông tại } C \Rightarrow \tan \alpha = \frac{CC'}{CI} \Rightarrow CC' = \frac{x\sqrt{3}}{2} \tan \alpha$$



$$\text{Do đó : } V = Bh = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \tan \alpha \right) = \frac{3}{8} x^3 \tan \alpha$$

$$\Rightarrow V = \frac{3}{8} \cdot 8 \cos \alpha \sqrt{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3 \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha}$$

$$\text{Ta có : } V^4 = 81 \sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có :

$$1 = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{4} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27} \geq \frac{1}{4} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 12 = \frac{81 \times 4}{27} \geq V^4$$

$$\text{Vậy } V_{\max} = \sqrt[4]{12} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = 2$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = \arctan \sqrt{2} \quad \blacksquare$$

BT15. Tuyển sinh ĐH khối D 2009

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\triangle ABC$ vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính thể tích khối chóp I.ABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

$$\bullet \triangle A'AC \text{ vuông} \Rightarrow AC^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2$$

$$\triangle ABC \text{ vuông} \Rightarrow BC^2 = 5a^2 - a^2 = 4a^2$$

$$A'M \parallel AC \Rightarrow \frac{IA'}{IC} = \frac{A'M}{AC} = \frac{1}{2}$$

Trong mp $(A'AC)$ vẽ $IH \parallel AA'$ thì

$$IH \perp \text{mp} (ABC)$$

$$\text{Ta có } \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3} AA' = \frac{4a}{3}$$

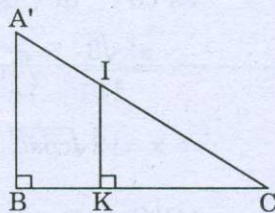
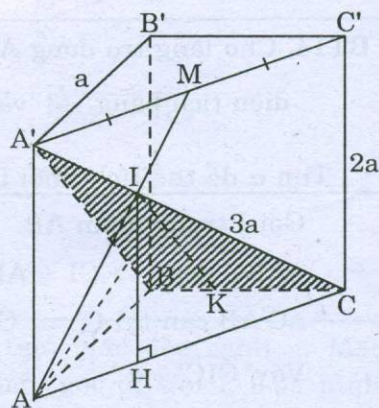
$$\text{Vậy } V_{I.ABC} = \frac{1}{3} IH \cdot dt(\triangle ABC)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{1}{2} a(2a) = \frac{4a^3}{9}$$

$$\bullet \text{ Ta có } BC \perp BA \text{ và } BA' \Rightarrow BC \perp \text{mp} (A'B'BA) \Rightarrow BC \perp BA'$$

$$\text{Vẽ } IK \parallel BA' \Rightarrow \frac{IK}{BA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow IK = \frac{2}{3} BA' = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$$



$$\text{Ta có } V_{I.ABC} = V_{A.IBC} = \frac{1}{3}d(A, (IBC)).dt(\Delta IBC)$$

$$\Rightarrow d(A, (IBC)) = \frac{3V_{I.ABC}}{dt(\Delta IBC)} = \frac{3V}{\frac{1}{2}IK.BC} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

* **Cách khác:**

Vẽ $AM \perp A'B$ (1)

Do $BC \perp (A'AB) \Rightarrow BC \perp AM$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AM \perp (IBC)$

$$\text{Vậy } d(A, (IBC)) = AM = \frac{A'A.AB}{A'B} = \frac{2a.a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \blacksquare$$

BT16. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ΔABC vuông $BA = BC = a$, $\widehat{BA'C} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $A.BA'C'$ và khoảng cách từ C đến mp($A'BC'$).

• Ta có $C'B' \perp B'A'$ và AA'

$\Rightarrow C'B' \perp (A'AB)$

$$\text{Vậy } V_{A.BA'C'} = V_{C'.ABA'}$$

$$= \frac{1}{3}C'B'.dt(\Delta A'AB)$$

$$\Delta A'BC \perp \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{BC}{A'B} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A'B = \sqrt{3}BC = a\sqrt{3}$$

$$\Delta A'AB \perp \Rightarrow A'A^2 = A'B^2 - AB^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2$$

$$\text{Vậy } dt(\Delta A'AB) = \frac{1}{2}A'A.AB = \frac{1}{2}a^2\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } V_{C'.ABA'} = \frac{1}{3}C'B'.dt(\Delta A'AB) = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}a^2\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

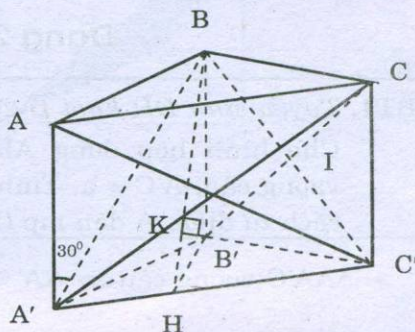
• Gọi H trung điểm $A'C'$

$\Delta B'A'C' \perp$ cân $\Rightarrow B'H \perp A'C'$

$\Leftrightarrow BH \perp A'C'$

$$\Delta BA'H \perp \Rightarrow BH^2 = A'B^2 - A'H^2 = 3a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{10a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } dt(\Delta BA'C') = \frac{1}{2}BH.A'C' = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{10}}{2} . a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{20}}{4} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$$



Ta có: $AC \parallel (BA'C')$ nên $d(C, BA'C') = d(A, BAC)$

$$= \frac{3V_{A.BA'C'}}{dt(BA'C')} = \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

- *Ghi chú:* Có thể làm cách khác như sau:

Gọi I là giao điểm $B'C$ và BC' thì I trung điểm $B'C$ nên

$$d(C, A'BC') = d(B', A'BC')$$

Vẽ $B'H \perp A'C'$ và $B'K \perp BH$ thì $B'K \perp (BA'C')$

$$\begin{aligned} \Delta BB'H \perp &\Rightarrow \frac{1}{B'K^2} = \frac{1}{B'H^2} + \frac{1}{B'B^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{B'K^2} = \frac{4}{A'C^2} + \frac{1}{B'B^2} = \frac{4}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{2a^2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } d(C, A'BC') = BK = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}. \blacksquare$$

Dạng 2. HÌNH HỘP ĐỨNG

BT1. Tuyển sinh DH khối D 2012

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $\Delta A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mp (BCD') theo a.

$$\bullet \Delta AA'C \text{ vuông cân} \Rightarrow AA' = AC = \frac{A'C}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta ANC \text{ vuông cân} \Rightarrow AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Ta có } V_{A.BB'C'} = V_{C'.ABB'} = \frac{1}{3} B'C' \cdot dt(\Delta ABB') = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} \right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}.$$

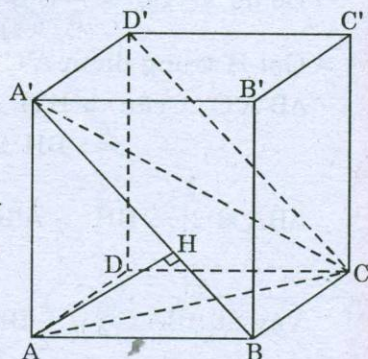
$$\bullet \text{ Vẽ } AH \perp A'B \quad (1)$$

$$\text{Ta có } BC \perp (A'B'BA) \Rightarrow BC \perp AH \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AH \perp (BCD')$$

$$\Delta ABA' \text{ vuông} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AA'}{A'B} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}}}$$

$$\text{Vậy } AH = d(A, (BCD')) = \frac{a}{\sqrt{6}}. \blacksquare$$



BT2. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa AB và $A'D$ bằng 2, độ dài đường chéo mặt bên bằng 5. Tính thể tích lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ lăng trụ tứ giác đều nên đây là lăng trụ đứng và đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là hình chữ nhật.

Do $AB \parallel A'B'$ nên $AB \parallel (A'B'D)$

$$d(AB, A'D) = d(AB, (A'B'D)) = d(A, CA'B'D))$$

Vẽ $AK \perp A'D$ (1)

Ta có : $A'B' \perp (AD, A'D') \Rightarrow A'B' \perp AK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AK \perp (A'B'D)$

Vậy $AK = 2$ và $A'D = 5$.

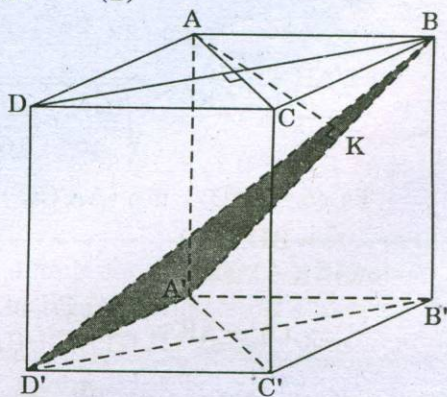
$$\begin{aligned} \triangle AA'D \text{ vuông} &\Rightarrow AK^2 = KD.KA' \\ &\Rightarrow 4 = KD(5 - KD) \\ &\Rightarrow KD^2 - 5KD + 4 = 0 \\ &\Rightarrow KD = 1 \vee KD = 4 \end{aligned}$$

• $KD = 1$ thì $KA' = 4$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } AD^2 &= KD.DA' = 1.(5) = 5 \\ AA'^2 &= KA'.DA' = 4.(5) = 20 \\ V_{ABCD.A'B'C'D'} &= AA'.dt(ABCD) \\ &= 2\sqrt{5}.(5) = 10\sqrt{5}. \end{aligned}$$

• $KD = 4$ thì $KA' = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } AD^2 &= KD.DA' = 4.(5) = 20 \\ AA'^2 &= KA'.DA' = 5 \\ V_{ABCD.A'B'C'D'} &= AA'.dt(ABCD) = \sqrt{5}.(20) = 20\sqrt{5} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



BT3. Đề dự bị ĐH khối A 2006

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$,

$AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $A'B'$.

a) Chứng minh AC' vuông góc mp $(BDMN)$.

b) Tính thể tích khối chóp A.BDMN.

a) $\triangle ABD$ đều nên $AC \perp BD$

Mà : $AA' \perp BD$ nên $BD \perp mp(AA'CC') \Rightarrow BD \perp AC'$ (1)

Gọi O và O' là tâm hai hình thoi $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Gọi I là trung điểm MN.

Ta có : $OA = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

nên $AOA'A'$ là hình vuông.

Do đó : $AC' \perp OI$ tại H (2)

Từ (1) và (2), ta có :

$$AC' \perp mp(BDMN)$$

b) $\triangle OAK$ vuông $\Rightarrow OA^2 = AH.AK$

$$\Rightarrow AH = \frac{OA^2}{AK} = \frac{\frac{3a^2}{4}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}}} = \frac{3a}{\sqrt{15}}$$

Ta có : $BD \perp mp(AA'CC')$

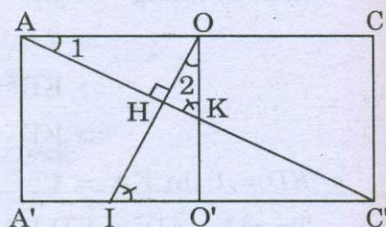
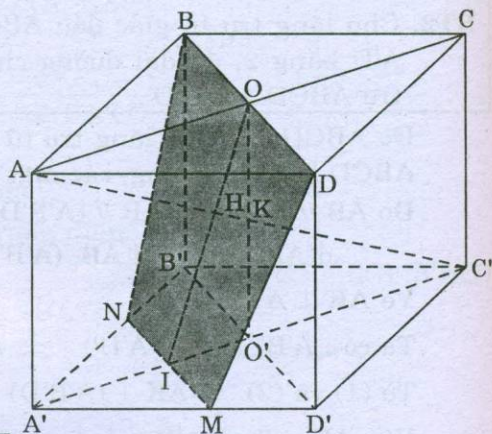
$$\Rightarrow BD \perp OI$$

$$\triangle OAK = \triangle OIO'$$

$$\Rightarrow OI = AK = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Do đó : } V_{A.BDMN} = \frac{1}{3} AH.d_t(BDMN) = \frac{1}{3} AH \cdot \frac{IO}{2} (BD + MN)$$

$$= \frac{1}{6} AH \cdot IO \cdot \frac{3}{2} BD = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a}{\sqrt{15}} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{4} \cdot a = \frac{3a^3}{16} \blacksquare$$



BT4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy M, N lần lượt trên BB', DD' sao cho $MB' = ND' = \frac{a}{3}$. Mặt phẳng (AMN) chia hình lập phương làm hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

AM cắt AB tại P .

AN cắt $A'D'$ tại Q .

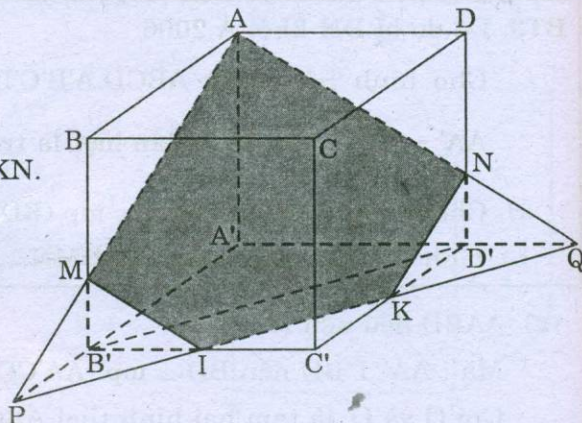
PQ cắt $B'C', C'D'$ tại I và K .

Mặt phẳng là ngũ giác $AMIKN$.

Ta có : $MB' \parallel AA'$

$$\Rightarrow \frac{MB'}{AA'} = \frac{PB'}{PA'} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{ND'}{AA'} = \frac{QD'}{QA'} = \frac{1}{3}$$



$$\text{Vậy : } \frac{QD'}{QA'} = \frac{PB'}{PA'} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow B'D' \parallel PQ \Rightarrow PA' = QA' = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Do đó : } V_{A.A'PQ} = \frac{1}{3} AA'.dt (\Delta A'PQ) = \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{3a^3}{8}$$

$$\text{và } V_{P.MBI} = V_{Q.ND'K} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{72}$$

$$\text{Do đó : } V_1 = V_{A'B'D'.AMIKN} = V_{A.A'PQ} - V_{M.B'PI} - V_{N.KD'Q} = \frac{3a^3}{8} - \frac{a^3}{36} = \frac{25a^3}{72}$$

$$V_2 = V_{C'BCD.AMIKN} = V_{\text{lập phương}} - V_1 = a^3 - \frac{25a^3}{72} = \frac{47a^3}{72}$$

$$\text{Vậy : } \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47} \quad \blacksquare$$

BT5. Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đường cao h, mặt (A'BD) tạo với mặt bên (ABB'A') góc α , đáy ABCD là hình vuông. Tính thể tích và diện tích xung quanh hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' theo h và α .

Vẽ $AI \perp A'B$

Ta có : $AD \perp mp (AA'B'B) \Rightarrow AD \perp A'B$

Do $A'B \perp AD$ và AI nên $A'B \perp mp (ADI)$

$\Rightarrow A'B \perp DI$

Vậy : $\widehat{DIA} = \alpha$

$$\Delta ADI \text{ vuông tại } A \Rightarrow \cot \alpha = \frac{AI}{AD}$$

$$\Rightarrow AI = AD \cot \alpha$$

$$\Delta A'AB \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2}$$

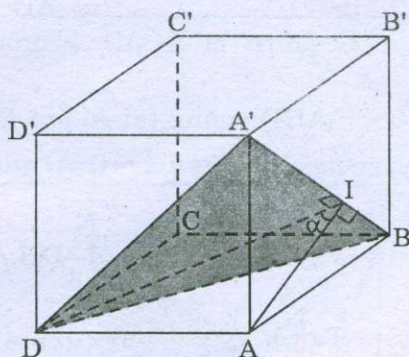
$$\Rightarrow \frac{1}{AD^2 \cot^2 \alpha} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{AD^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{AD^2} \left(\frac{1}{\cot^2 \alpha} - 1 \right) = \frac{1}{AD^2} (\tan^2 \alpha - 1)$$

$$\Rightarrow AD^2 = h^2 (\tan^2 \alpha - 1)$$

$$\text{Do đó : } V_{ABCD.A'B'C'D'} = h \cdot dt (ABCD) = h^3 (\tan^2 \alpha - 1)$$

$$S_{xq} = 4dt (ABB'A') = 4h \cdot AB = 4h^2 \sqrt{\tan^2 \alpha - 1} \quad \blacksquare$$



BT6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm DD' , M là trung điểm BB' . Tính thể tích khối $M.A'KD$ và khoảng cách giữa CK và $A'D$.

• Ta có : $\Delta A'D'K = \Delta MBC$ (c.c.c) $\Rightarrow A'K = MC$

$\Delta A'B'M = \Delta DKC$ (c.c.c) $\Rightarrow A'M = CK$

Vậy $A'KCM$ là hình bình hành $\Rightarrow A'M \parallel CK$

Do đó : $d(CK, A'D) = d(KC, (A'DM)) = d(K, (A'DM))$

Ta có : $BB' \parallel (A'D'DA)$

$\Rightarrow d(M, (A'D'DA)) = d(B, (A'D'DA))$
 $= AB = a$

$\Rightarrow V_{M.A'KD} = \frac{1}{3}d(M, (A'D'DA)).dt(\Delta A'KD)$

$= \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}$

• Vẽ $AH \perp A'M$ (1)

Ta có : $AD \perp (A'B'BA) \Rightarrow AD \perp A'M$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'M \perp mp(AHD) \Rightarrow A'M \perp DH$

$\Delta A'HA \sim \Delta MB'A' \Rightarrow \frac{AH}{A'B'} = \frac{AA'}{MA'}$

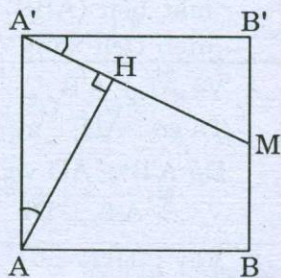
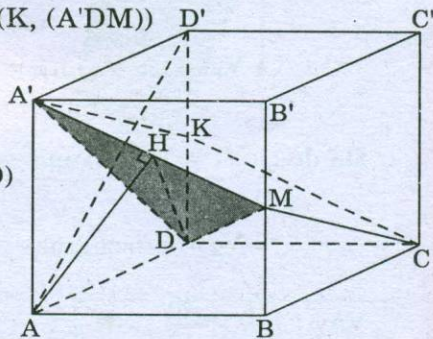
$\Rightarrow AH = \frac{a \cdot a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

ΔAHD vuông tại $A \Rightarrow DH^2 = AH^2 + AD^2$
 $= \frac{4a^2}{5} + a^2 = \frac{9a^2}{5}$

Vậy $dt(\Delta A'DM) = \frac{1}{2}DH.A'M = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3a^2}{4}$

Ta có : $V_{M.A'KD} = V_{K.MA'D} = \frac{1}{3}d(K, (A'MD)).dt(\Delta MA'D)$

$\Rightarrow d(CK, A'D) = d(K, (A'MD)) = \frac{3V}{dt(\Delta MA'D)} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{3}$ ■

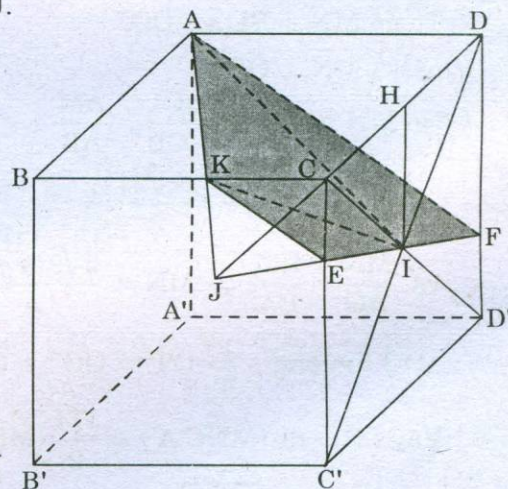
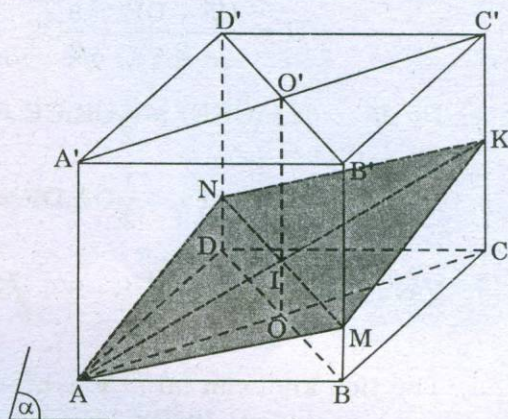


BT7. Đề dự bị ĐH khối D 2006

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy K trên cạnh CC'

sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A, K và song song BD , (α)

chia khối lập phương làm hai khối đa diện. Tính thể tích hai khối đa diện đó theo a .



Mặt khác, gọi H là trung điểm CD, ta có :

$$IH = \frac{CE + DF}{2} = \frac{3}{2}CE \Rightarrow EC = \frac{2}{3}IH = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{3}$$

$$\text{Do đó : } dt(\triangle CKE) = \frac{1}{2}CK.CE = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a^2}{12} = S$$

$$dt(\triangle DAF) = \frac{1}{2}DA.DF = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{a^2}{3} = S'$$

$$\text{Vậy : } V_{CKE,DAF} = \frac{h}{3}(S + S' + \sqrt{SS'}) = \frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3} + \sqrt{\frac{a^4}{36}}\right) = \frac{7a^3}{36}$$

$$\text{Thể tích khối còn lại : } V = a^3 - \frac{7a^3}{36} = \frac{29a^3}{36} \quad \blacksquare$$

BT9. Cho ABCD.A'B'C'D' hình lập phương cạnh a. Lấy M trên cạnh AB với AM = x (0 < x < a). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và A'C'.

- Tính diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình lập phương.
- Tìm x để mặt phẳng (P) chia lập phương thành hai khối đa diện mà thể tích khối này bằng hai lần thể tích khối đa diện kia.

- Mặt phẳng (MA'C') chứa A'C' // AC nên cắt mp (ABCD) theo giao tuyến MN // AC // A'C'.

Mặt cắt là hình thang cân MNC'A'.

Gọi O, O' là tâm hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Gọi I là giao điểm MN và BD.

Ta có MN ⊥ BD và OO' ⊥

nên MN ⊥ OI

$$\text{Do } MN \parallel AC \text{ nên } \frac{OI}{OB} = \frac{AM}{AB}$$

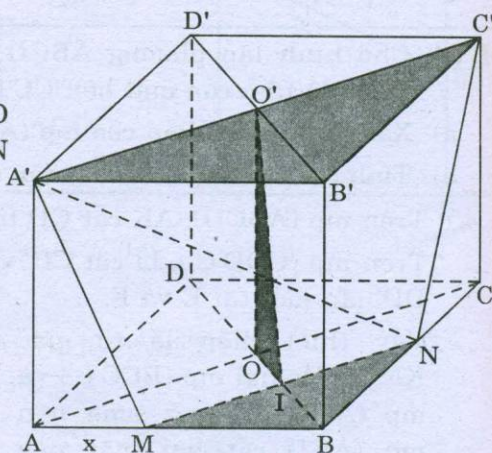
$$\Rightarrow OI = \frac{x}{a} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{và } \frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{2}(a-x)}{a} = (a-x)\sqrt{2}$$

$$\triangle OO'I \text{ vuông} \Rightarrow O'I^2 = OO'^2 + OI^2 = a^2 + \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Vậy : } S = dt(MNC'A') = \frac{O'I}{2}(MN + A'C')$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}[a\sqrt{2} + (a-x)\sqrt{2}] = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + \frac{x^2}{2}}(2a-x).$$



b) Ta có : $V_{A'B'C'.MBN} = \frac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3}{3}$

$A'B'C'.MBN$ là hình chóp cụt có chiều cao $OO' = a$

$$S_1 = dt(\Delta A'B'C') = \frac{a^2}{2}; \quad S_2 = dt(\Delta BM) = \frac{(a-x)^2}{2}$$

$$\text{Vậy : } \frac{a^3}{3} = \frac{a}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \Leftrightarrow a^2 = \frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{(a-x)^2}{2}} = \frac{(a-x)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = a^2 + a(a-x) + (a-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a \quad (\text{do } 0 < x < a) \quad \blacksquare$$

Dạng 3. LĂNG TRỤ XIÊN

BT1. Tuyển sinh ĐH khối B 2011

Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mp $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách từ B' đến mp $(A'BD)$ theo a .

- Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có $A'O \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm của AD .

Ta có $OI \perp AD \Rightarrow A'I \perp AD$

Vậy góc của hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ là $\widehat{AIO} = 60^\circ$.

$$\Delta A'IO \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{A'O}{IO} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A'O = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{\text{lăng trụ}} = A'O \cdot dt(ABCD) = \frac{3a^3}{2}.$$

- Ta có $B'C \parallel A'D \Rightarrow B'C \parallel (A'BD)$

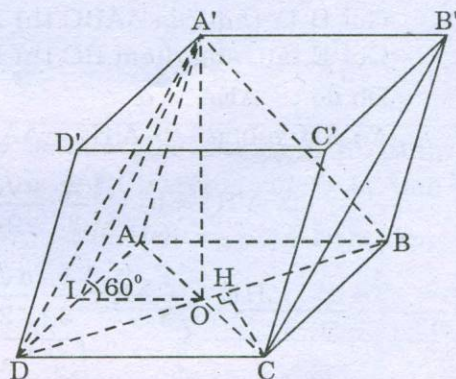
Vậy $d(B', (A'BD)) = d(C, (A'BD))$

Vẽ $CH \perp BD$. Do $A'O \perp (ABCD)$ nên $CH \perp A'O$. Vậy $CH \perp (A'BD)$.

$$\Delta BCD \text{ vuông} \Rightarrow CH = \frac{CB \cdot CD}{BD} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } d(B', (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \blacksquare$$

- * Lưu ý: Có thể chuyển khoảng cách qua A .



BT2. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông cân tại A, mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy, mặt bên $ACC'A'$ tạo với đáy một góc α . Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a và α .

Do mp $(ABB'A')$ vuông góc mp (ABC)
nên vẽ $A'H \perp AB$ thì $A'H \perp mp (ABC)$

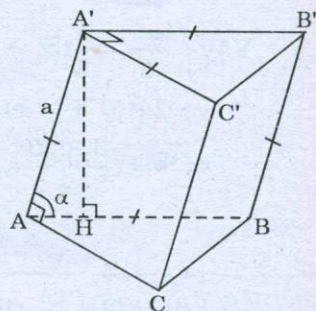
Ta có : $AC \perp AB \Rightarrow AC \perp AA'$

Vậy : $\widehat{BAA'} = \alpha$

$$\triangle A'AH \text{ vuông} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{A'H}{AA'} \\ \Rightarrow h = A'H = a \sin \alpha$$

$$\text{Ta có : } dt(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Do đó : } V_{ABC.A'B'C'} = Bh = \frac{a^2}{2} \cdot a \sin \alpha = \frac{a^3}{2} \sin \alpha \quad \blacksquare$$



BT3. Đề dự bị ĐH khối B 2006

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều, $AB = a$, $AA' = b$. Gọi α là góc của hai mp (ABC) và $(A'BC)$. Tính $\tan \alpha$ và thể tích khối chóp $A'.BB'C'C$ theo a và b .

Do $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều.

Gọi H là tâm của $\triangle ABC$ thì $A'H \perp mp (ABC)$.

Gọi E là trung điểm BC thì $BC \perp AE \Rightarrow A'E \perp BC$

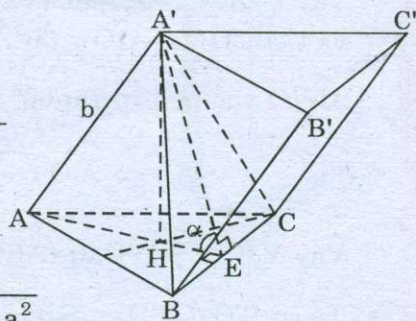
Do đó : $\widehat{AEA'} = \alpha$

$$\triangle A'AH \text{ vuông} \Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2$$

$$\Rightarrow A'H^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}$$

$$\text{Ta có : } HE = \frac{1}{3} AE = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \frac{A'H}{HE} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}{\frac{1}{6} a \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$$



$$\text{Ta có : } V_{A'.BB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC}$$

$$= A'H \cdot dt(\triangle ABC) - \frac{A'H}{3} dt(\triangle ABC) = \frac{2}{3} A'H \cdot dt(\triangle ABC)$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{3b^2 - a^2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{6} \quad \blacksquare$$

BT4. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , $CA = CB = a$. M $\widehat{p}$ ($AA'B$) vuông góc m $\widehat{p}$ (ABC), $AA' = a\sqrt{3}$, $\widehat{A'AB}$ nhọn. Góc của m $\widehat{p}$ ($A'AC$) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ.

Do $(AA'B) \perp (ABC)$

Vẽ $A'H \perp AB$ thì $A'H \perp (ABC)$

Vẽ $HK \perp AC$ thì $A'K \perp AC$

Vậy : $\widehat{A'KH} = 60^\circ$.

Gọi $h = A'H$.

$$\Delta A'KH \text{ vuông} \Rightarrow \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{A'H}{A'K} \\ \tan 60^\circ = \frac{h}{HK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{h}{\sqrt{3}} \text{ và } A'K = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta AHK \text{ vuông cân} \Rightarrow AK = HK = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

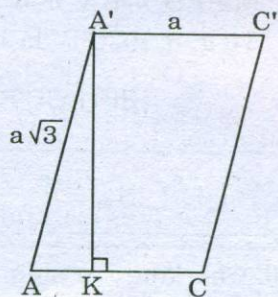
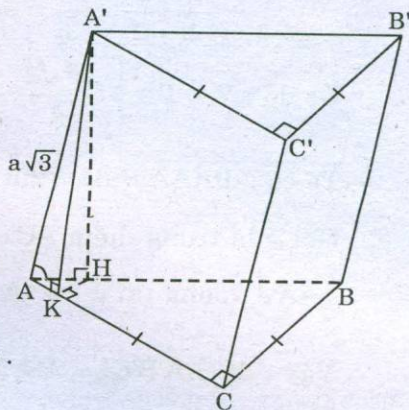
$$\Delta A'AK \text{ vuông} \Rightarrow AA'^2 = AK^2 + A'K^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 = \frac{h^2}{3} + \frac{4h^2}{3} = \frac{5h^2}{3}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{9}{5}a^2 \Rightarrow h = \frac{3}{\sqrt{5}}a$$

$$\text{Do đó : } V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot dt(\Delta ABC)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2\sqrt{5}}a^3 \blacksquare$$



BT5. Cho lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với O là tâm đường tròn (ABC). Biết $\widehat{BAA'} = \frac{\pi}{4}$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ theo a .

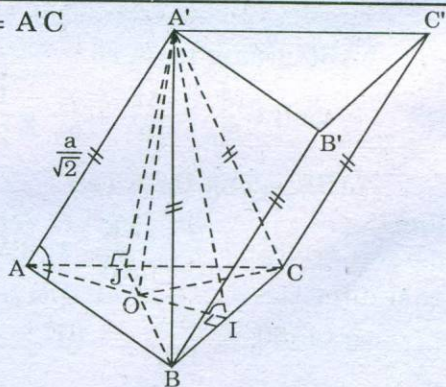
- Ta có : $OA = OB = OC$ nên $A'A = A'B = A'C$

$\Delta A'AB$ cân tại A' mà $\widehat{BAA'} = \frac{\pi}{4}$
nên là tam giác vuông cân tại A' .

$$\text{Vậy } AA' = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$\Delta OOA'$ vuông tại O nên :

$$\begin{aligned} OA'^2 &= AA'^2 - AO^2 \\ &= AA'^2 - \left(\frac{2}{3}AI\right)^2 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow OA'^2 = \frac{a^2}{2} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}$$

$$\text{Do đó : } V = Bh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a^3}{4\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}.$$

• Ta có : $dt(AA'B'B) = 2dt(\Delta A'AB) = AA' \cdot AB \sin \frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{2}$

Gọi J là trung điểm AC.

$$\Delta AA'J \text{ vuông tại } J \Rightarrow A'J^2 = AA'^2 - AJ^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Vậy : } dt(AA'B'C) = A'J \cdot AC = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

Ta có : $BC \perp AI$ và $A'O$ nên $BC \perp mp(AA'I) \Rightarrow BC \perp AA'$

Mà $BB' \parallel AA'$ nên $BB' \perp BC$

Tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật nên

$$dt(BCC'B') = BC \cdot BB' = a \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Do đó : } S_{xq} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = a^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \blacksquare$$

BT6. Cho lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại A với $AB = a$, $BC = 2a$. Mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi, mặt bên $BCC'B'$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hai mặt này tạo nhau một góc α .

a) Xác định góc α .

b) Tính theo a và α thể tích hình lăng trụ.

a) Do $mp(ABC)$ vuông góc $mp(BCC'B')$ theo giao tuyến BC .

Vẽ $AK \perp BC$ thì $AK \perp mp(BCB'C')$.

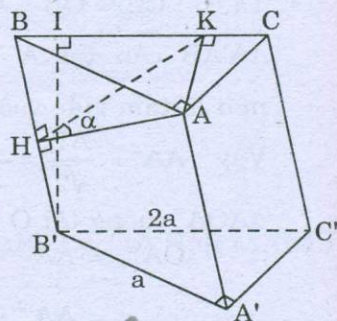
ΔABC vuông tại A có :

$$\cos B = \frac{k}{h} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

ΔABK vuông tại K có :

$$\sin 60^\circ = \frac{d}{h} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{và } \tan 60^\circ = \frac{AK}{BK} \Rightarrow BK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$$



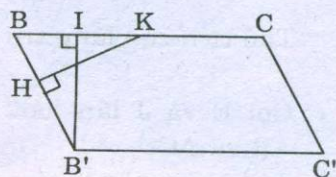
Trên mp (BCC'B') vẽ $KH \perp BB'$

Ta có : $BB' \perp HK$ và AK

$$\Rightarrow BB' \perp \text{mp} (AHK) \Rightarrow BB' \perp AH$$

Do đó $\widehat{KHA} = \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \triangle AHK \text{ vuông tại K} &\Rightarrow \cot \alpha = \frac{HK}{AK} \\ &\Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cot \alpha \end{aligned}$$



Từ B' vẽ $B'I \perp BC$

Do mp (BB'C'C) $\perp$ mp (A'B'C') nên $B'I \perp \text{mp} (ABC)$

$$\text{Ta có : } \triangle B'IB \sim \triangle KHB \Rightarrow \frac{B'I}{HK} = \frac{B'B}{KB}$$

$$\Rightarrow B'I = HK \cdot \frac{BB'}{KB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cot \alpha \right) \cdot \frac{a}{\frac{a}{2}} = a\sqrt{3} \cot \alpha$$

Do đó : $V = B_h = dt (\triangle ABC) \cdot B'I$

$$V = \frac{1}{2} AK \cdot BC \cdot B'I = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{3} \cot \alpha = \frac{3a^3}{2} \cot \alpha \quad \blacksquare$$

BT7. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $\triangle ABC$ có $\triangle ABC$ đều cạnh a , $AA' = 2a$, góc của AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối $A.CA'B'$.

Vẽ $A'H \perp \text{mp} (ABC)$

Ta có $\widehat{A'AH} = 60^\circ$

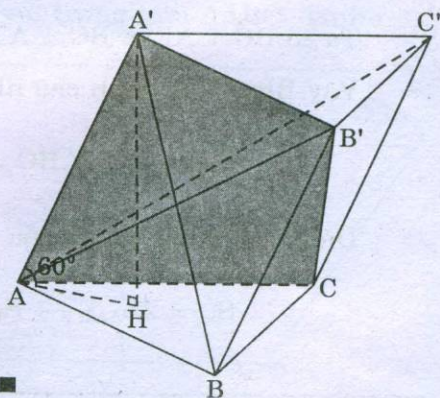
$$\triangle A'AH \text{ vuông} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{A'H}{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có } V_{A.A'B'C} + V_{C.A'B'C} + V_{A'.ABC} = V_{LT}$$

$$\text{Mà } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} V_{LT}, \quad V_{C.A'B'C} = \frac{1}{3} V_{LT}$$

$$\Rightarrow V_{A.A'B'C} = \frac{1}{3} V_{LT} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4} \quad \blacksquare$$



BT8. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều, cạnh a . Đỉnh A' có hình chiếu trùng với tâm đáy (ABC) và cạnh bên AA' tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình lăng trụ theo a .

- Ta có : $\widehat{A'AH} = 45^\circ$ với H là tâm của tam giác đều ABC.

$$\triangle AA'H \text{ vuông cân} \Rightarrow A'H = AH = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Thể tích của lăng trụ : } V = Bh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{4}$$

- Gọi E và J lần lượt là trung điểm AB và AC.

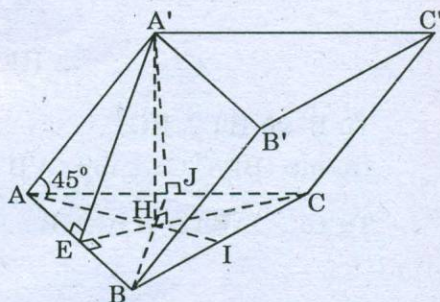
$$CE \perp AB \Rightarrow A'E \perp AB$$

$$BJ \perp AC \Rightarrow A'J \perp AC$$

$$\text{Ta có : } \triangle A'HE = \triangle A'JH \Rightarrow A'E = A'J$$

$$\text{Vậy } dt(\triangle AA'B'B) = dt(\triangle AA'C'C)$$

$$= A'E \cdot AB$$



$$\text{Trong đó } AB = a \text{ và } A'E = \sqrt{A'H^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$$

$$\text{Vậy } dt(\triangle AA'B'B) = \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{15}}{6}$$

$$\triangle AA'H \text{ vuông cân} \Rightarrow AA' = A'H \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Ta có } BC \perp AI \text{ và } BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow BC \perp BB' \text{ vì } BB' \parallel AA'.$$

Vậy $BB'C'C$ là hình chữ nhật có diện tích là :

$$S_{BB'C'C} = BB' \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích xung quanh của lăng trụ là :

$$S_{xq} = 2S_{\triangle AA'B'B} + S_{BB'C'C} = \frac{a^2(\sqrt{15} + \sqrt{6})}{3} \quad \blacksquare$$

BT9. Tuyển sinh ĐH khối A 2008

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là trung điểm của BC. Tính thể tích khối tứ diện $A'.ABC$ và cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AA' , $B'C'$.

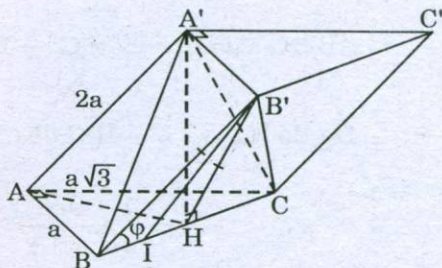
- Gọi H là trung điểm BC.

Ta có $A'H \perp mp(ABC)$

$$\text{và } AH = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$$

$$\begin{aligned} \Delta AA'H \text{ vuông} &\Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2 \\ &\Rightarrow A'H^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} A'H \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{6} A'H \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{6} (a\sqrt{3}) \cdot (a^2\sqrt{3}) = \frac{a^3}{2}.$$



- Gọi φ là góc giữa AA' và $B'C'$.

Ta có: $AA' \parallel BB'$ và $B'C' \parallel BC$ nên $\varphi = \widehat{B'BC}$ hay $\pi - \widehat{B'BC}$

$\Delta A'B'H$ vuông tại A' .

Ta có: $A'H \perp (ABC)$, mà $(A'B'C') \parallel (ABC) \Rightarrow A'H \perp (A'B'C')$

$$\Rightarrow HB'^2 = A'B'^2 + A'H^2 = 4a^2$$

Ta có: $B'B = B'H = 2a$ nên $\Delta BB'H$ cân tại B' .

Gọi I là trung điểm BH thì $B'I \perp BH$

$$\Delta B'BI \text{ vuông} \Rightarrow \cos \varphi = \cos \widehat{B'BI} = \frac{IB}{BB'} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4} \quad \blacksquare$$

BT10. Tuyển sinh ĐH khối B 2009

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$. Góc của BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° , ΔABC vuông tại C , $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm ΔABC . Tính thể tích khối $A'.ABC$.

Đặt $AC = x$

$$\Delta ABC \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}x$$

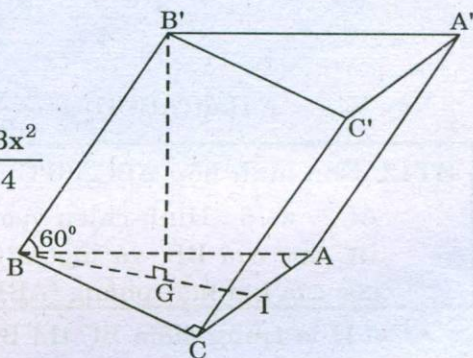
$$\Delta BIC \text{ vuông} \Rightarrow BI^2 = 3x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{13x^2}{4}$$

$$\Rightarrow BI = \frac{x\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BI = \frac{x\sqrt{13}}{3}$$

$$\Delta B'BG \text{ vuông} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{BG}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow BB' = 2BG$$

$$\Rightarrow a = \frac{2x\sqrt{13}}{3} \Rightarrow x = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$



$$\Delta B'BG \text{ vuông} \Rightarrow B'G^2 = B'B^2 - BG^2 = a^2 - \frac{13x^2}{9} = a^2 - \frac{13}{9} \cdot \frac{9a^2}{4 \cdot 13} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } V_{A'.ABC} &= \frac{1}{3} B'G \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} x \cdot x \sqrt{3} = \frac{1}{12} \cdot 3ax^2 \\ &= \frac{1}{4} a \cdot \frac{9a^2}{4 \cdot 13} = \frac{9a^3}{208} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

BT11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $A'A = A'B = A'D$, góc của AA' và đáy $ABCD$ là 60° . Tính thể tích khối hộp.

Gọi H là tâm của Δ đều ABD

Do A' và H cách đều ba điểm A, B, D nên $A'H$ là trục đường tròn ABD nên $A'H \perp (ABCD)$

Vậy góc của AA' và $(ABCD)$ là $\widehat{AA'H} = 60^\circ$

$$\text{Ta có: } AH = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

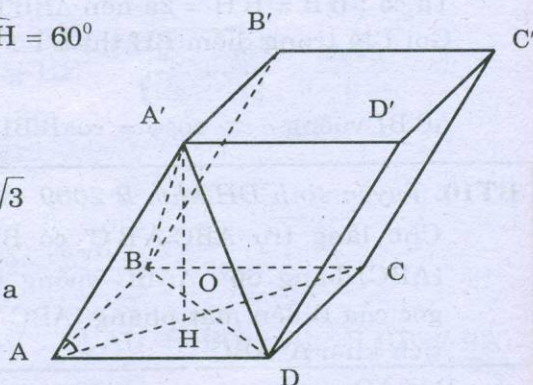
$$\Delta A'AH \perp \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{A'H}{AH} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$$

$$Dt(ABCD) = 2dt(\Delta ABD)$$

$$= 2 \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{\text{hộp}} = A'H \cdot dt(ABCD) = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2} \quad \blacksquare$$



BT12. Cho hình hộp $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại C , $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{6}$. Hình chiếu vuông góc của B' lên $mp(ABC)$ là trung điểm BH của BC góc của BB' và $mp(ABC)$ là 45° . Tính thể tích khối lăng trụ và góc của hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CBB'C')$.

• Gọi H là trung điểm BC thì $B'H \perp (ABC)$

Vậy góc của $B'B$ và $mp(ABC)$ là $\widehat{B'BH} = 45^\circ$

$$\Delta B'BH \perp \text{ cân} \Rightarrow B'H = BH = \frac{BC}{2} = a$$

$$\text{Vậy } V_{LT} = B'H \cdot dt(\Delta ABC)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{B'H}{2} \cdot CA \cdot CB \\
 &= a \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{6} = a^3\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

• Vẽ $CI \perp BB'$

Ta có $AC \perp CB$ và $B'H$

Nên $AC \perp (BB'C'C) \Rightarrow AC \perp BB'$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow BB' \perp (ACI)$

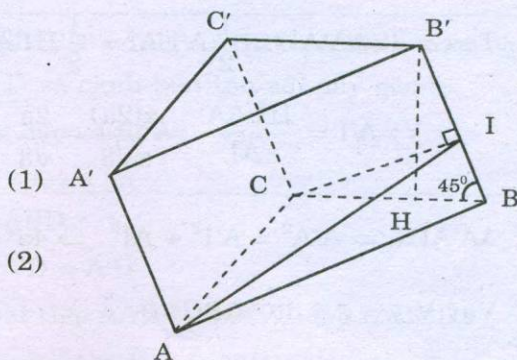
$\Rightarrow BB' \perp AI$

Do đó $\widehat{AIC}$ là góc của hai mp($ABB'A'$) và ($CBB'C'$)

$$\Delta CIB \perp \text{cân} \Rightarrow CI = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\Delta ACI \perp \Rightarrow \tan \widehat{CIA} = \frac{AC}{CI} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

Vậy góc của hai mp($ABB'A'$) và ($CBB'C'$) là 60° . ■



BT13. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ΔABC đều $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc A' lên mp(ABC) là trung điểm BC . Hai mặt phẳng ($AA'B'B'$) và ($ACC'A'$) vuông góc nhau. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Hướng dẫn: Trong bài này chỉ biết một yếu tố độ dài duy nhất là cạnh bên bằng $2a$. Chúng ta phải đặt x bằng độ dài cạnh Δ đều ABC dựa vào các giả thiết khác để tính x .

Bài giải:

Gọi I là trung điểm BC thì $A'I \perp (ABC)$

Vẽ $BH \perp AA'$

Do $(AA'B'B) \perp (AA'C'C)$

Nên $BH \perp (AA'C'C)$

$\Rightarrow BH \perp HC$

ΔABC đều $\Rightarrow BC \perp AI$

$A'I \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp A'I$

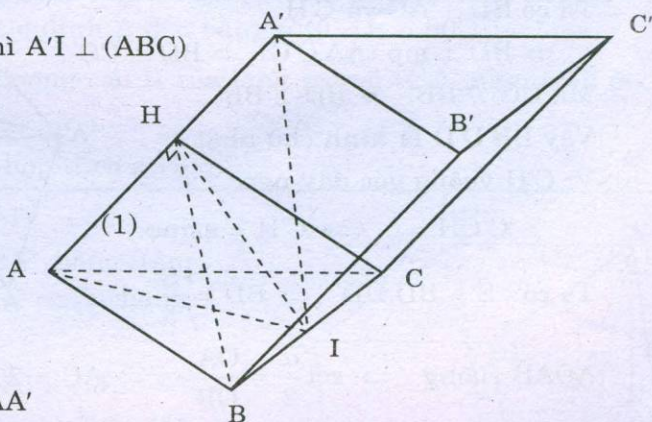
Vậy $BC \perp (A'AI)$

$\Rightarrow BC \perp HI$ (2) và $BC \perp AA'$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \Delta HBC \perp$ cân tại H

$$\text{Đặt } AB = 2x \text{ thì } IB = IC = IH = x \text{ và } HB = HC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}$$

Ta có: $AA' \perp BC$ và HB nên $AA' \perp (HBC) \Rightarrow AA' \perp HI$



Ta có: $dt(\Delta A'AI) = \frac{1}{2} A'I \cdot AI = \frac{1}{2} IH \cdot AA'$

$$\Rightarrow A'I = \frac{IH \cdot AA'}{AI} = \frac{x(2a)}{x\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta A'AI \perp \Rightarrow A'A^2 = A'I^2 + AI^2 \Rightarrow 4a^2 = \frac{4a^2}{3} + 3x^2 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}a}{3}$$

Vậy $V_{LT} = A'I \cdot dt(\Delta ABC)$

$$= \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} = 2ax^2$$

$$= 2a \cdot \frac{8a^2}{9} = \frac{16a^3}{9} \quad \blacksquare$$

BT14. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh bên có độ dài bằng a và tạo với đáy một góc φ . Đáy lăng trụ là hình thoi có $\hat{A} = \hat{C} = \alpha$. Mặt chéo $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt phẳng đáy.

- Chứng minh rằng mặt chéo $(BB'D'D)$ là hình chữ nhật.
- Cho biết diện tích mặt chéo $(BB'D'D)$ là S . Tính thể tích hình lăng trụ đó theo S, α, φ .

- a) Dựng $C'H \perp AC \Rightarrow C'H \perp (ABCD)$ vì $(AA'C'C) \perp (ABCD)$.

Do đó $C'H$ là đường cao của lăng trụ.

Ta có $BD \perp AC$ và $C'H$

$$\Rightarrow BD \perp mp(AA'C'C) \Rightarrow BD \perp CC'$$

$$\text{Mà } CC' \parallel BB' \Rightarrow BD \perp BB'$$

Vậy $BB'D'D$ là hình chữ nhật.

- b) Vì $C'H$ vuông góc đáy nên

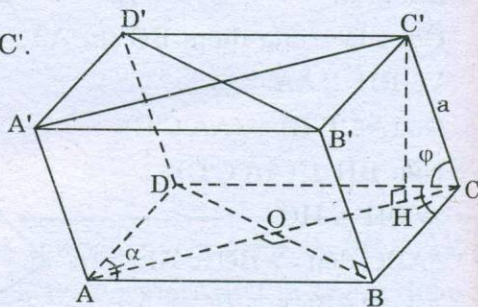
$$\widehat{C'CH} = \varphi \Rightarrow C'H = a \sin \varphi.$$

$$\text{Ta có : } S = BD \cdot DD' \Rightarrow BD = \frac{S}{a}$$

$$\Delta OAB \text{ vuông} \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow AC = 2OA = \frac{S}{a} \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Ta có : } S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{S^2}{2a^2} \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$V_{LT} = C'H \cdot S_{ABCD} = a \cdot \sin \varphi \cdot \frac{S^2}{2a^2} \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{S^2}{2a} \cdot \sin \varphi \cdot \cot \frac{\alpha}{2} \quad \blacksquare$$



BT15. Cho hình hộp xiên $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AA' = A'B = A'D$ và cạnh bên tạo với đáy góc α .

a) Xác định góc α và chân đường cao vẽ từ A' .

b) Tính thể tích V của hình hộp theo a và α .

a) • Gọi I là tâm của tam giác đều ABD .

Ta có : $IA = IB = ID$ và $A'A = A'B = A'D$

Vậy $A'I$ là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD \Rightarrow A'I \perp mp(ABCD)$.

• Do $A'I$ là hình chiếu vuông góc của $A'A$ lên $mp(ABCD)$ nên $\widehat{A'AC} = \alpha$.

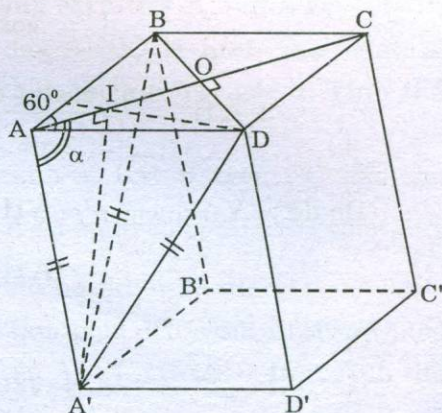
$$b) \text{ Ta có : } AI = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle AA'I \text{ vuông tại } I \Rightarrow \tan \alpha = \frac{d}{k} = \frac{A'I}{AI}$$

$$\Rightarrow h = A'I = AI \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \tan \alpha$$

$$\text{Do đó : } V = Bh = 2dt(\triangle ABD) \cdot A'I$$

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \tan \alpha \\ &= \frac{a^3}{2} \tan \alpha \quad \blacksquare \end{aligned}$$



BT16. Cho hình hộp xiên $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a , các góc ở đỉnh A đều bằng α ($0 < \alpha < 90^\circ$).

a) Chứng minh chân đường cao H của lăng trụ vẽ từ A' nằm trên đường chéo AC .

b) Tính thể tích hình hộp theo a và α .

a) Vẽ $A'I \perp AB$, $A'J \perp AD$

Tam giác vuông IAA' bằng tam giác vuông JAA' vì AA' cạnh chung,

$$\widehat{A'AI} = \widehat{A'AJ} = \alpha.$$

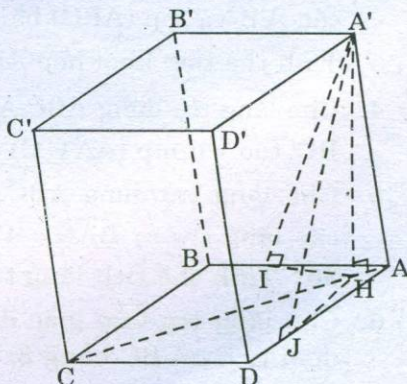
Do đó : $A'I = A'J$ và $AI = AJ$

Vẽ $A'H \perp mp(ABCD)$ thì $HI = HJ$

và $HI \perp AB$, $HJ \perp AD$.

Do đó $\triangle IHA = \triangle HJA$

$\Rightarrow HI = HJ \Rightarrow H \in AC$ đường phân giác của $\widehat{BAD}$.



$$b) \Delta AA'J \text{ vuông tại } J \Rightarrow \cos A = \frac{AJ}{AA'} \Rightarrow AJ = a \cos \alpha$$

$$\Delta AHJ \text{ vuông tại } J \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AJ}{AH} \Rightarrow AH = \frac{AJ}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Delta AA'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow A'H^2 = a^2 \left(\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{a^2 \left[\frac{1 + \cos \alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right]}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow A'H^2 = \frac{a^2 (\cos \alpha - \cos 2\alpha)}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Do đó: } V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot dt(ABCD) = 2A'H \cdot dt(\Delta ABD)$$

$$= A'H \cdot a^2 \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}a \sqrt{\cos \alpha - \cos 2\alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} a^2 \sin \alpha$$

$$= \sqrt{2}a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha - \cos 2\alpha} \quad \blacksquare$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ΔABC vuông, $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Lấy M trên cạnh AA' sao cho $AM = \frac{1}{3}AA'$. Tính thể tích khối $MABC'$.
2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ΔABC vuông tại B , $BA = BC = a$. Góc của $A'B$ và mp (ABC) bằng 60° . Tính thể tích lăng trụ.
3. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AA'B'D'$ là tứ diện đều cạnh a .
4. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ΔABC vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$, BC' tạo với mp $(AA'C'C)$ góc 30° . Tính thể tích lăng trụ.
5. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, chiều cao lăng trụ a , $\widehat{BAD} = 45^\circ$, AC' và DB' lần lượt tạo với đáy góc 45° và 60° . Tính thể tích lăng trụ.
6. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Mp $(A'BC)$ tạo với đáy góc 60° , diện tích $\Delta A'BC$ bằng 8. Tính thể tích lăng trụ.

7. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy a , khoảng cách của AB và $A'C$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích lăng trụ.
8. Cho lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là trọng tâm O của $\triangle ABC$. Biết khoảng cách từ O đến CC' bằng a , góc của hai mặt phẳng (ACC') và (BCC') bằng 60° . Tính thể tích lăng trụ.
9. Cho lăng trụ tam giác đều cạnh đáy a , $AA' = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối $ABC'A'$.
10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi K là trung điểm của DD' . Tính thể tích khối $MA'KD$ và khoảng cách từ CK đến $A'D$.
11. Cho hình hộp xiên $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AA' = A'B = A'D$, các cạnh bên tạo với đáy góc α . Tính thể tích hình hộp.
12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy K trên CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua K , A và song song BD , (α) chia khối lập phương làm hai đa diện. Tính thể tích hai khối đa diện.
13. Cho lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là tâm của $\triangle ABC$, $\widehat{BAA'} = 45^\circ$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ.
14. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, BD' tạo với đáy góc 60° . Gọi E là trung điểm của AD . Mp (BED') cắt hình hộp theo thiết diện có diện tích là $4\sqrt{39}$. Tính thể tích khối hộp.
15. Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa AB và $A'D$ bằng 4. Độ dài đường chéo mặt bên bằng 10.
 - a) Vẽ AK vuông góc $A'D$. Chứng minh $AK = 4$.
 - b) Tính thể tích lăng trụ.

HÌNH NÓN

- Hình nón tròn xoay là hình sinh ra bởi một tam giác vuông quay một vòng quanh một cạnh góc vuông.
- Các thiết diện qua trục là các tam giác cân bằng nhau.
- Các thiết diện vuông góc trục là các hình tròn.

Công thức :

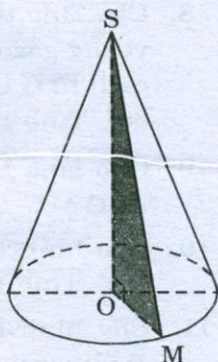
$$S_{xq} = \pi Rl$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

R : bán kính đường tròn đáy

$l = SM$: đường sinh

$h = SO$: đường cao



BT1. Cho hình nón có chiều cao h . Gọi (α) là mặt phẳng qua đỉnh hình nón và tạo mặt đáy một góc $\frac{\pi}{4}$. Tính diện tích mặt cắt của (α) và hình nón biết rằng mặt cắt chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo $\frac{2\pi}{3}$.

Vẽ $OH \perp AB$ thì $SH \perp AB$

Ta có : $\widehat{SHO} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \triangle SHO$ vuông cân

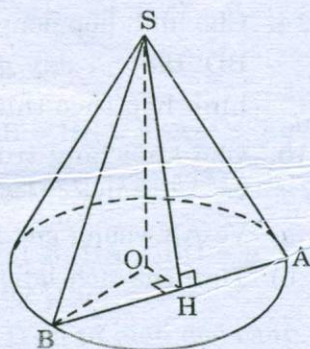
$$\Rightarrow SH = SO\sqrt{2} = h\sqrt{2}$$

Ta có : $sđ \widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BOH} = 60^\circ$

$$\triangle OBH \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{BH}{OH}$$

$$\Rightarrow AB = 2BH = 2h\sqrt{3}$$

$$\text{Do đó : } dt(\triangle SAB) = \frac{1}{2} SH \cdot AB = \frac{1}{2} (h\sqrt{2})(2h\sqrt{3}) = h^2\sqrt{6} \quad \blacksquare$$



BT2. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , có $AB = a$ và $\widehat{ACB} = \alpha$, người ta quay tam giác đó một vòng quanh BC .

a) Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành theo a và α .

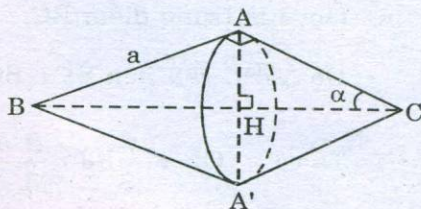
b) Tính diện tích toàn phần của hình tròn xoay đó theo a và α .

Khi quay quanh BC , hình tròn xoay có dạng như hình vẽ.

a) Thể tích hình tròn xoay :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3}BH.AH^2 + \frac{\pi}{3}CH.AH^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi AH^2 BC}{3}$$



Trong đó $AH = a \cos \alpha$; $BH = a \sin \alpha$; $HC = AH \cdot \cot \alpha = \frac{a \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$

$$\text{Vậy : } V = \frac{\pi}{3} a^2 \cos^2 \alpha \left(a \sin \alpha + \frac{a \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{\pi a^3 \cot \alpha \cdot \cos \alpha}{3}$$

b) $S_{tp} = \pi AH(AB + AC) = \pi a \cos \alpha (a + a \cot \alpha) = \pi a^2 \cos \alpha (1 + \cot \alpha)$ ■

BT3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và $\widehat{BSC} = \alpha$.

a) Tính thể tích khối chóp theo a và α .

b) Tính diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp hình chóp đó.

a) Gọi M là trung điểm của BC, $SH \perp mp(ABCD)$, $HM \perp BC \Rightarrow SM \perp BC$

$$\triangle SMC \text{ vuông} \Rightarrow SM = \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\triangle SHM \text{ vuông} \Rightarrow SH = \sqrt{\frac{a^2}{4} \cot^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a \sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

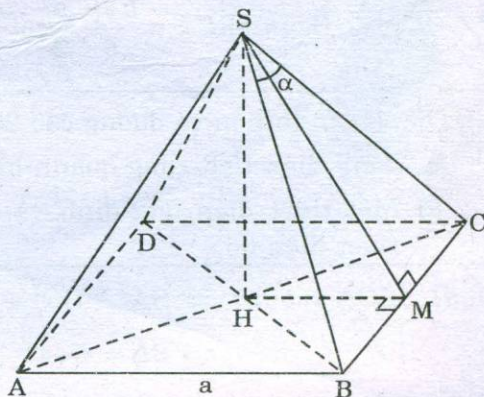
$$\text{Thể tích khối chóp : } V = \frac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{6 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

b) Diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp hình chóp là :

$$S = \pi HB \cdot SB$$

$$\text{Với } HB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ và } SB = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \blacksquare$$



BT4. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy a, góc ở đỉnh của mặt bên là α .

a) Tính thể tích khối chóp đã cho.

b) Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S nội tiếp trong hình chóp đó.

a) Gọi I là trung điểm BC.

Do ΔSBC cân nên $SI \perp BC$ và $\widehat{BSI} = \frac{1}{2}\widehat{BSC} = \frac{\alpha}{2}$

$$\text{Ta có: } OB = \frac{2}{3}BJ = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta SBI \text{ vuông tại } I \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BI}{SB} \Rightarrow SB = \frac{a}{2\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Delta SOB \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO^2 = SB^2 - OB^2$$

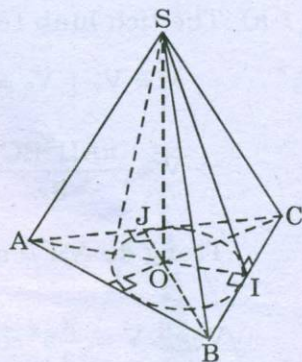
$$\Rightarrow SO^2 = \frac{a^2}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{12} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 4 \right) = \frac{a^2}{12} \left(3\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right).$$

$$\text{Vậy: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot dt(\Delta ABC)$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \sqrt{3\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{a^3}{24} \sqrt{3\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$$

$$b) \Delta SBI \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{BI}{SI} \Rightarrow l = SI = \frac{BI}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2} \text{ và } R = OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{12} \cot \frac{\alpha}{2} \quad \blacksquare$$



BT5. Một hình nón có đường cao 20, bán kính đáy $r = 25$.

a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

b) Một thiết diện qua đỉnh và cách tâm của đáy là 12. Tính diện tích thiết diện đó.

$$a) \Delta SOA \text{ vuông} \Rightarrow SA^2 = SO^2 + OA^2 = 400 + 625 = 1025$$

$$\Rightarrow SA = 5\sqrt{41}$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot (25) \cdot (5\sqrt{41}) = 125\pi\sqrt{41}.$$

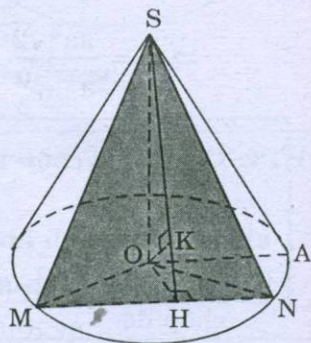
b) Mặt phẳng qua đỉnh S cắt mặt nón theo ΔSMN .

Vẽ $OH \perp MN$. Vẽ $OK \perp SH$.

Ta có $MN \perp mp(SOH)$ nên $MN \perp OK$.

Vậy $OK \perp mp(SMN)$

$$\Rightarrow OK = 12 = d(O, mp(SMN))$$



$$\Delta SOH \text{ vuông} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{144} - \frac{1}{400} = \frac{256}{144.400}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{12 \times 20}{16} = 15$$

$$\Delta OMH \text{ vuông} \Rightarrow MH^2 = OM^2 - OH^2 = 625 - 225 = 400$$

$$\Rightarrow MN = 2MH = 40$$

$$\Delta SOH \text{ vuông} \Rightarrow SH^2 = SO^2 + OH^2 = 400 + 225 = 625$$

$$\Rightarrow SH = 25$$

$$\text{Vậy : dt } (\Delta SMN) = \frac{1}{2} SH.MN = \frac{1}{2}.25.40 = 500 \quad \blacksquare$$

BT6. Cho S.ABC là hình chóp tam giác đều có cạnh bên a và góc của mặt bên và đáy là 30° . Gọi hình nón nội tiếp hình chóp là hình nón đỉnh S đáy là đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC. Tính diện tích xung quanh hình nón nội tiếp hình chóp S.ABC theo a.

Gọi J là trung điểm BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC. Do S.ABC là hình chóp đều nên $SI \perp mp(ABC)$ và $AJ \perp BC \Rightarrow SJ \perp BC$.
 Vậy $\widehat{SJA} = 30^\circ$.

Đặt $r = IJ$ là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC .

$$\Delta SIJ \text{ vuông} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{SI}{IJ} \text{ và } \cos 30^\circ = \frac{IJ}{SJ}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{r\sqrt{3}}{3} \text{ và } SJ = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

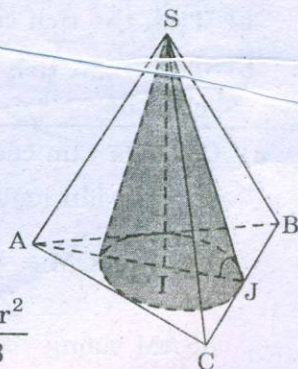
$$\Delta SIA \text{ vuông} \Rightarrow SA^2 = AI^2 + SI^2$$

$$\Rightarrow a^2 = (2r)^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4r^2 + \frac{r^2}{3} = \frac{13r^2}{3}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{13}}a$$

$$\text{Vậy } l = SJ = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Do đó : } S_{xq} = \pi rl = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}a\right) \left(\frac{2a}{\sqrt{13}}\right) = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{13} \quad \blacksquare$$



BT7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao $SH = h$, $\widehat{SAB} = \alpha$, với $\alpha > 45^\circ$. Tính diện tích xung quanh hình nón đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Gọi I là trung điểm BA. Ta có : $SI \perp BA \Rightarrow HI \perp BA$.

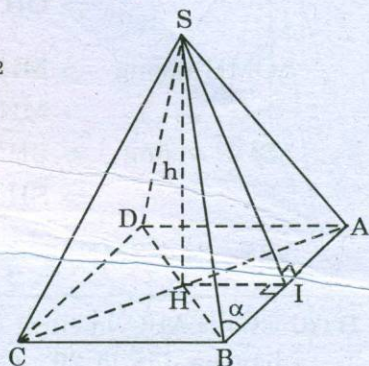
Đặt a là cạnh hình vuông $ABCD$.

$$\triangle SAI \text{ vuông tại } I \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AI}{AS} \Rightarrow SA = \frac{AI}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} \triangle AHS \text{ vuông tại } H &\Rightarrow SA^2 = SH^2 + HA^2 \\ &\Rightarrow \frac{a^2}{4 \cos^2 \alpha} = h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &\Rightarrow a^2 \left(\frac{1}{4 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{2}\right) = h^2 \\ &\Rightarrow a^2 = \frac{h^2 4 \cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

Do đó : $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot HA \cdot SA$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{a}{2 \cos \alpha}\right) = \frac{\pi}{2 \sqrt{2} \cos \alpha} \left(\frac{h^2 4 \cos^2 \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha}\right) = \frac{\pi \sqrt{2} h^2 \cos \alpha}{1 - 2 \cos^2 \alpha} \quad \blacksquare$$



BT8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy a , góc đỉnh của mặt bên là α .

- Tính thể tích của hình chóp đã cho.
- Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S nội tiếp trong hình chóp đó.

a) Gọi O là tâm của tam giác đều ABC .

M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, AC .

Ta có : $OM = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\triangle SAM \text{ vuông} \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{SM}{AM}$$

$$\Rightarrow SM = \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2}$$

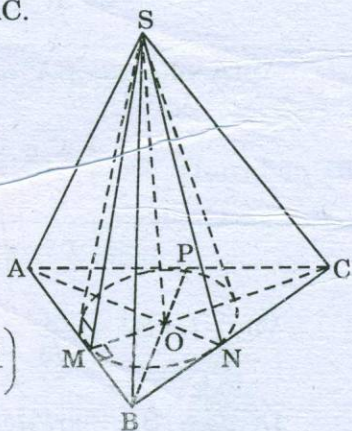
$$\triangle SOM \text{ vuông} \Rightarrow SO^2 = SM^2 - OM^2$$

$$\Rightarrow SO^2 = \frac{a^2}{4} \cot^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{12} \left(3 \cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{3 \cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

Vậy $V = \frac{1}{3} SO \cdot dt(\triangle ABC)$

$$\Rightarrow V = \frac{a}{6\sqrt{3}} \sqrt{3 \cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1} \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{24} \sqrt{3 \cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$$



- b) Hình nón nội tiếp trong hình chóp có đỉnh là S, đáy là đường tròn tâm O nội tiếp tam giác đều ABC. Bán kính đường tròn đáy là OM, đường sinh SM.

$$\text{Ta có : } S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot OM \cdot SM = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a}{2} \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 \pi \sqrt{3}}{12} \cot \frac{\alpha}{2} \quad \blacksquare$$

BT9. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, bán kính đường tròn nội tiếp đáy bằng r, góc giữa đường cao SH hình chóp và mặt bên bằng α .

- a) Tính thể tích hình chóp đó theo r và α .
b) Tính diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- a) Gọi I là trung điểm BC. Ta có $AI \perp BC$.

Vẽ $HK \perp SI$. Ta có $BC \perp mp(SHI)$ nên $SC \perp HK$

Ta có $HK \perp mp(SBC)$ nên hình chiếu vuông góc của SH lên mp(SBC) là SK. Vậy $\widehat{HSI} = \alpha$.

$$\Delta SHI \text{ vuông} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{SH}{HI} \Rightarrow SH = r \cot \alpha$$

$$\begin{aligned} \Delta SHI \text{ vuông} &\Rightarrow SI^2 = SH^2 + HI^2 \\ &= r^2(1 + \cot^2 \alpha) = \frac{r^2}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có : } AI = 3HI = 3r$$

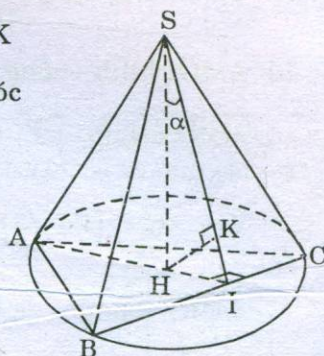
Gọi a là cạnh tam giác đều ABC:

$$\Delta ABI \text{ vuông} \Rightarrow AB^2 = AI^2 + BI^2 \Rightarrow a^2 = 9r^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}r$$

$$\text{Do đó : } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{r}{3} \cot \alpha \cdot \frac{(2\sqrt{3}r)^2 \sqrt{3}}{4} = r^3 \sqrt{3} \cot \alpha.$$

$$\text{b) } \Delta SAH \text{ vuông} \Rightarrow SA^2 = SH^2 + AH^2 = r^2 \cot^2 \alpha + 4r^2$$

$$\text{Ta có : } S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot AH \cdot SA = \pi(2r)r\sqrt{\cot^2 \alpha + 4} \quad \blacksquare$$



BT10. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Biết rằng có một hình nón nội tiếp hình chóp đã cho có bán kính đáy r, góc giữa đường sinh và đáy là φ . Tính diện tích xung quanh của

- a) Hình nón
b) Hình chóp.

a) Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì $SO \perp (ABC)$.

Gọi I là tiếp điểm của AC và đường tròn (O).

Ta có : $AC \perp OI \Rightarrow AC \perp SI$

Vậy $\widehat{SIC} = \varphi$.

$$\Delta SOI \text{ vuông} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{SO}{OI}$$

$$\Rightarrow h = SO = r \cdot \tan \varphi$$

$$\text{và } \cos \varphi = \frac{OI}{SI} \Rightarrow SI = \frac{r}{\cos \varphi}$$

$$\text{Ta có : } S_{\text{xq hình nón}} = \pi r l = \pi r \cdot \left(\frac{r}{\cos \varphi} \right) = \frac{\pi r^2}{\cos \varphi}.$$

b) AMOI hình vuông $\Rightarrow AI = OI = r$

$$\Delta OIC \text{ vuông} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OI}{IC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow IC = \sqrt{3}r$$

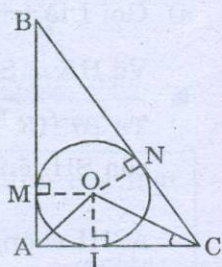
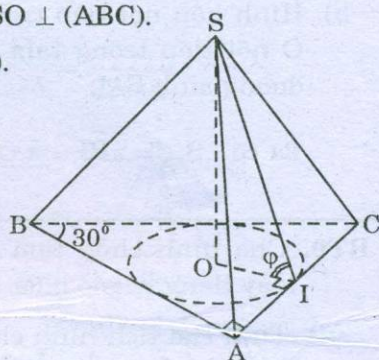
$$\text{Vậy } AC = (1 + \sqrt{3})r$$

$$\Delta ABC \text{ vuông} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \sqrt{3}AC = \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})r$$

$$S_{\text{xq hình chóp}} = dt(\Delta ABS) + dt(\Delta SBC) + dt(\Delta SAC)$$

$$= \frac{1}{2}SI(AB + BC + AC) = \frac{SI}{2}(3AC + AB)$$

$$= \frac{r^2}{2\cos \varphi} [3(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} + 3] = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\cos \varphi} r^2 \quad \blacksquare$$



BT11. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O. Lấy M trên mặt phẳng chứa đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với A, B $\in$ (O).

a) Chứng minh trung điểm I của SM cách đều A, B và tâm (O).

b) Xác định đường vuông góc chung của SM và AB, góc của hai mặt phẳng (SMA) và (SMB).

a) Do MA, MB là tiếp tuyến nên $MA \perp OA$, $MB \perp OB$

Do định lí ba đường vuông góc $MA \perp SA$, $MB \perp SB$

$$\text{Các tam giác SOM, SAM, SBM vuông} \Rightarrow OI = AI = BI = \frac{SM}{2}.$$

b) Ta có $AB \perp OM$, $AB \perp SO$

nên $AB \perp (SOM)$ tại H

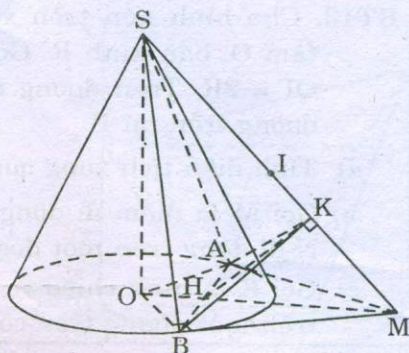
Từ H vẽ $HK \perp SM$ thì HK là đường vuông góc chung của AB và SM

Ta có $AB \perp (OSM) \Rightarrow AB \perp SM$

Mà $HK \perp SM$, vậy $SM \perp (AHK)$

Do đó $SM \perp KA$ và KB

Vậy góc của (SMA) và (SMB) là $\widehat{AKB}$ ■



BT12. Cho hình chóp S.ABCD ngoại tiếp hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O. Chứng minh :

a) $dt(\triangle SAB) + dt(\triangle SCD) = dt(\triangle SBC) + dt(\triangle SAD)$.

b) $\cot \widehat{SAB} + \cot \widehat{SBA} + \cot \widehat{SCD} + \cot \widehat{SDC} =$
 $= \cot \widehat{SAD} + \cot \widehat{SDA} + \cot \widehat{SBC} + \cot \widehat{SCB}$

a) Gọi M, N, H, K là các tiếp điểm của AB, BC, CD, DA và đường tròn (O).

Ta có : $AB \perp OM \Rightarrow AB \perp SM$

$BC \perp ON \Rightarrow BC \perp SN$

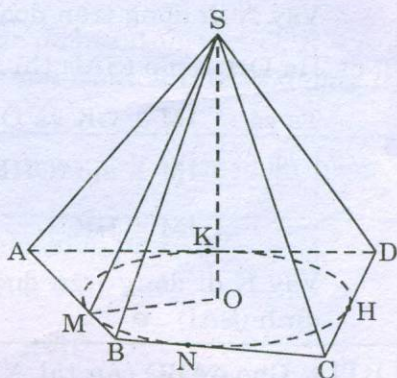
$CD \perp OH \Rightarrow SH \perp CD$

$OK \perp AD \Rightarrow SK \perp AD$

Mặt khác do $AK = AM$, $BM = BN$,
 $CN = CH$, $DK = DH$ nên

$AB + CD = AD + BC$

Ta có : $SM = SN = SH = SK = l$



Do đó : $dt(\triangle SAB) + dt(\triangle SCD) = \frac{1}{2}l(AB + CD) = \frac{1}{2}l(AD + BC)$
 $= dt(\triangle SBC) + dt(\triangle SAD)$.

b) Ta có : $AM = SM \cot \widehat{SAB}$, $BM = SM \cot \widehat{SBA}$
 $\Rightarrow AB = AM + BM = l(\cot \widehat{SAB} + \cot \widehat{SBA})$

Tương tự : $CD = l(\cot \widehat{SCD} + \cot \widehat{SDC})$

$BC = l(\cot \widehat{SBC} + \cot \widehat{SCB})$

$AD = l(\cot \widehat{SAD} + \cot \widehat{SDA})$

Mà $AB + DC = AD + BC$, ta suy ra điều phải chứng minh ■

BT13. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, chiều cao $2R$, đáy là đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi I là điểm nằm trên mặt phẳng đáy sao cho $OI = 2R$. Trên đường tròn O vẽ bán kính OA vuông góc OI, IA cắt đường tròn tại B.

- Tính diện tích xung quanh hình nón.
- Gọi M là điểm di động trên SA, IM cắt mặt nón tại N. Chứng minh N di động trên một đoạn thẳng cố định.
- Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên IM. Chứng minh K di động trên một đường tròn cố định.

a) Ta có : $\triangle SAO$ vuông $\Rightarrow SA^2 = OA^2 + SO^2 = 5R^2$

Vậy : $S_{xq} = \pi Rl = \pi R^2 \sqrt{5}$.

b) Ta có $N \in IM \Rightarrow N \in mp(SAI)$

Mp (SAI) cắt mặt nón theo giao tuyến SA và SB.

Mà $N \in mp(SAI) \cap$ mặt nón.

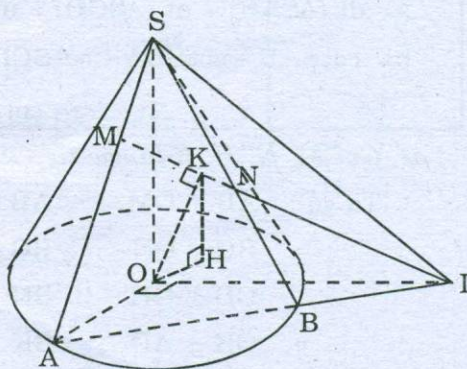
Vậy N di động trên đoạn SB cố định.

c) Hạ $OH \perp mp(SAI)$ thì H cố định.

Ta có : $IM \perp OK$ và OH

$\Rightarrow IM \perp mp(OHK)$

$\Rightarrow IM \perp HK \Rightarrow \widehat{HKI} = 1v$



Vậy K di động trên đường tròn đường kính HI nằm trên mặt phẳng cố định (SAI) ■

BT14. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nằm trên mặt phẳng (P). Vẽ Ax, By vuông góc và nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P). Gọi O là trung điểm BC. Trên Bx và Cy lấy hai điểm M và N di động sao cho $\triangle OMN$ vuông tại O. Đặt $BM = x$, $CN = y$, $BC = 2a$.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y, a.

b) Chứng minh mặt phẳng (AMN) luôn tiếp xúc một mặt nón cố định.

a) $\triangle OBM$ vuông $\Rightarrow OM^2 = x^2 + a^2$

$\triangle OCN$ vuông $\Rightarrow ON^2 = y^2 + a^2$

Vẽ $MH \parallel BC$, $\triangle MNH$ vuông tại H

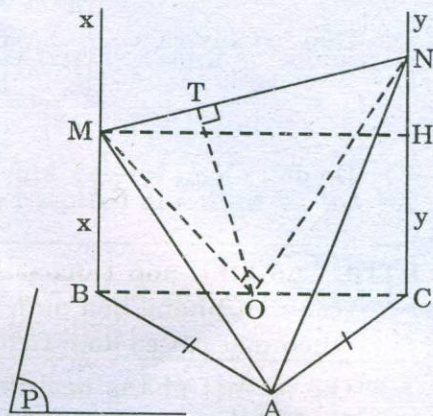
$\Rightarrow MN^2 = MH^2 + HN^2 = 4a^2 + |y - x|^2$

Mà $\triangle OMN$ vuông tại O

$$\begin{aligned}
 MN^2 &= OM^2 + ON^2 \\
 \Rightarrow 4a^2 + (y-x)^2 &= (x^2 + a^2) + (y^2 + a^2) \\
 \Rightarrow 4a^2 + x^2 + y^2 - 2xy &= x^2 + y^2 + 2a^2 \\
 \Rightarrow xy &= a^2.
 \end{aligned}$$

- b) Gọi OT là đường cao trong tam giác vuông OMN, ta có :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{OT^2} &= \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} \\
 &= \frac{1}{a^2 + x^2} + \frac{1}{y^2 + a^2} \\
 &= \frac{x^2 + y^2 + 2a^2}{(x^2 + a^2)(y^2 + a^2)} \\
 \Leftrightarrow OT^2 &= \frac{x^2 y^2 + a^2(x^2 + y^2) + a^4}{x^2 + y^2 + 2a^2} = \frac{2a^4 + a^2(x^2 + y^2)}{2a^2 + x^2 + y^2} \\
 \Leftrightarrow OT^2 &= a^2 \text{ (hằng số)}
 \end{aligned}$$



Vậy trong mp (AMN) thì OT luôn tiếp xúc đường tròn tâm O, $R = a$. Do đó mặt phẳng (AMN) luôn tiếp xúc mặt nón đỉnh A đáy là đường tròn (O; R) ■

BT15. Trong các khối nón tròn xoay có cùng diện tích toàn phần bằng π , khối nào có thể tích lớn nhất ?

Gọi R là bán kính đáy, SH = h là chiều cao khối nón.

Ta có : $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} \Leftrightarrow \pi = \pi R \cdot SM + \pi R^2$

$$\Leftrightarrow 1 = R\sqrt{h^2 + R^2} + R^2 \Leftrightarrow 1 - R^2 = R\sqrt{h^2 + R^2}$$

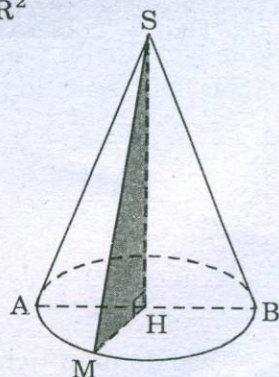
$$\Leftrightarrow \begin{cases} R \leq 1 \\ 1 - 2R^2 + R^4 = R^2(h^2 + R^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R \leq 1 \\ R^2(h^2 + 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R \leq 1 \\ R^2 = \frac{1}{h^2 + 2} \end{cases}$$

Ta có : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h}{h^2 + 2}$

Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$h^2 + 2 \geq 2\sqrt{2h^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \geq \frac{h}{h^2 + 2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \geq V = \frac{\pi h}{3(h^2 + 2)}$$



$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 2 \\ R^2 = \frac{1}{h^2 + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \sqrt{2} \\ R = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó : } V_{\max} = \frac{\pi}{6\sqrt{2}} \text{ khi } \begin{cases} h = \sqrt{2} \\ R = \frac{1}{2} \end{cases} \blacksquare$$

BT16. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao h và bán kính đáy R . Trong các mặt phẳng qua đỉnh hình nón, xác định mặt phẳng cắt hình nón theo mặt cắt có diện tích lớn nhất và hãy tính diện tích ấy.

Giả sử mặt phẳng qua đỉnh S của hình nón cắt hình nón theo mặt cắt là tam giác cân SAB . Vẽ $SH \perp AB$ thì $IH \perp AB$.

Đặt $AB = x$ với $0 < x < 2R$

$$\triangle AHI \text{ vuông} \Rightarrow IH^2 = AI^2 - AH^2 = R^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$\triangle SHI \text{ vuông} \Rightarrow SH^2 = IH^2 + SI^2 = R^2 - \frac{x^2}{4} + h^2$$

$$\text{Ta có : } dt(\triangle SAB) = \frac{1}{2}SH \cdot AB = \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} + h^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(R^2 - \frac{x^2}{4} + h^2\right) \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4} \cdot \left(R^2 - \frac{x^2}{4} + h^2\right)} = 2dt(\triangle SAB)$$

$$\Leftrightarrow R^2 + h^2 \geq 2dt(\triangle SAB)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4} + h^2}$$

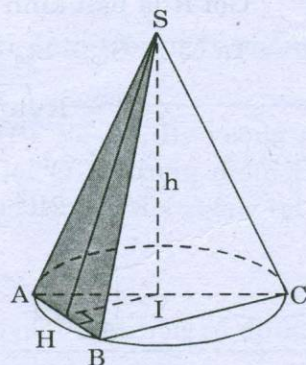
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = R^2 - \frac{x^2}{4} + h^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = R^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2(R^2 + h^2)}$$

$$\text{Do đó diện tích } (\triangle SAB) \text{ lớn nhất} = \frac{R^2 + h^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = AB = \sqrt{2(R^2 + h^2)} \blacksquare$$



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân cạnh a .
 - a) Tính diện tích toàn phần hình nón.
 - b) Tính diện tích thiết diện của hình nón và mp (α) qua đỉnh và tạo với đáy góc 60° .
2. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 12 và góc ở đỉnh là 120° . Tính diện tích thiết diện qua hai đường sinh vuông góc nhau.
3. Cho khối nón có bán kính đáy R , đường sinh $2R$. Thiết diện song song đáy chia khối nón thành hai phần có diện tích toàn phần bằng nhau. Tính tỉ số thể tích hai phần.
4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính diện tích xung quanh và thể tích khối nón đỉnh O là tâm hình vuông $ABCD$, có đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.
5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy a , cạnh bên tạo với đáy góc 60° . Tính diện tích toàn phần hình nón ngoại tiếp hình chóp đó.
6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có thể tích $6\sqrt{3}$. Tính thể tích khối nón đỉnh D , đáy là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
7. Cho khối nón có bán kính đáy R , chiều cao h , đỉnh S và O là tâm của đáy. Lấy M trên SO sao cho $OM = x$ ($0 < x < h$). Mp (P) vuông góc SO tại M cắt hình nón theo thiết diện là đường tròn (T). Gọi (N) là khối nón đỉnh O , đáy (T). Tìm M để (N) có thể tích lớn nhất.
8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết có hình nón nội tiếp trong hình chóp đã có, bán kính đáy R , góc giữa đường sinh và đáy là β . Tính diện tích xung quanh và thể tích khối chóp, khối nón.

HÌNH TRỤ

Hình trụ là hình sinh bởi một hình chữ nhật quay một vòng quanh một cạnh.

- Các thiết diện qua trục là các hình chữ nhật bằng nhau.
- Các thiết diện vuông góc với trục hình trụ là các hình tròn bằng hình tròn đáy.

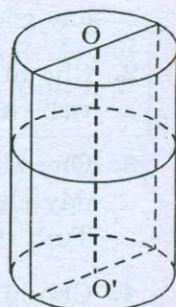
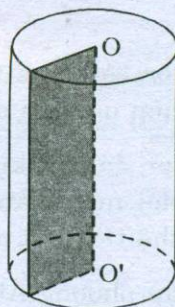
$$V = Bh = \pi R^2 h$$

$$S_{xq} = 2\pi Rh$$

B : diện tích đáy

h : chiều cao

R : bán kính đáy



BT1. Bên trong hình trụ tròn xoay có một hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông ABCD tạo với mặt phẳng đáy của hình trụ một góc 45° . Tính theo a diện tích xung quanh hình trụ và thể tích khối trụ đó.

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B xuống mặt đáy.

ABCD hình vuông $\Rightarrow DC \perp CB \Rightarrow CD \perp CB'$

Do đó : $\widehat{BCB'} = 45^\circ$ và DB' qua O' .

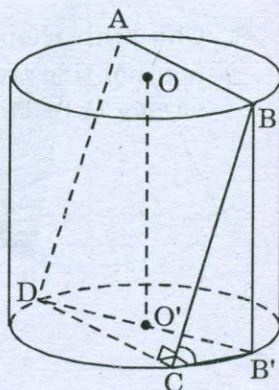
$$\triangle BB'C \text{ vuông cân} \Rightarrow h = BB' = CB' = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \triangle CDB' \text{ vuông} &\Rightarrow DB'^2 = CD^2 + CB'^2 \\ &= a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R = \frac{DB'}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Do đó : } S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2} \text{ (đvdt)}$$

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{3a^2}{8} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{16} \text{ (đvdt)} \blacksquare$$



BT2. Tuyển sinh ĐH khối A 2006

Cho hình trụ có đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích tứ diện OO'AB.

Vẽ BC vuông góc mặt phẳng đáy chứa đường tròn (O).

$$\triangle ABC \text{ vuông} \Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

Vẽ $CH \perp OA$ mà $OO' \perp CH$ nên $CH \perp mp(OO'A)$

Mà $BC \parallel mp(OO'A)$ nên

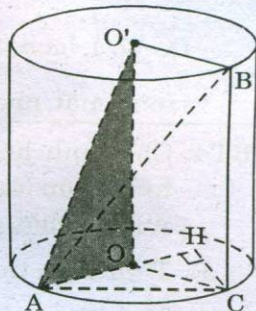
$$CH = d(C, (OO'A)) = d(B, (OO'A))$$

Trên đường tròn O, độ dài dây $AC = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \widehat{AOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{COH} = 60^\circ$$

$$\triangle \text{ vuông } COH \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{CH}{OC} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy: } V_{O.ABO'} = V_{B.AOO'} = \frac{1}{3}CH \cdot dt(\triangle OO'A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \blacksquare$$



BT3. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R, chiều cao $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn O và O' lấy lần lượt hai điểm A và B sao cho góc của hai đường thẳng OA và OB' bằng α không đổi.

a) Tính AB theo R và α .

b) Chứng minh khi AB di động thì trung điểm I của AB luôn di động trên một đường tròn cố định.

a) Vẽ $O'A' \parallel OA$ thì $\widehat{A'O'B} = \alpha$.

Vẽ $O'H \perp A'B \Rightarrow HA' = HB$

$$\triangle O'A'H \text{ vuông} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{h} = \frac{A'H}{O'A'}$$

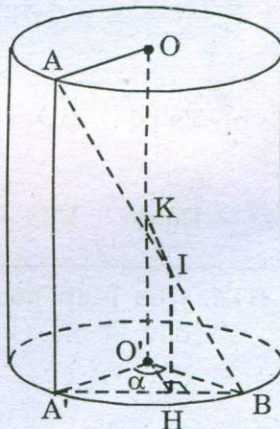
$$\Rightarrow A'B = 2A'H = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\triangle AA'B \text{ vuông} \Rightarrow AB^2 = AA'^2 + A'B^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2R^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow AB = R \sqrt{2 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

b) Gọi K là trung điểm OO'.



Ta có : $IH //$ và bằng $\frac{AA'}{2}$

$O'K //$ và bằng $\frac{AA'}{2}$

Vậy $IH //$ và bằng $O'K$ nên $O'HIK$ là hình chữ

nhật nên $KI = O'H = R \cos \frac{\alpha}{2}$ (không đổi).

Do đó I luôn di động trên đường tròn tâm K bán kính $R' = R \cos \frac{\alpha}{2}$ nằm trong mặt phẳng qua K và song song với hai đáy ■

BT4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC = b$, đường chéo $D'B$ của hình hộp tạo với mặt phẳng đáy một góc α và tạo với mặt bên $A'B'BA$ một góc β .

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình hộp đó.

b) Tính thể tích hình hộp đó.

a) Ta có : $\widehat{D'BD} = \alpha$ và $\widehat{BD'C} = \beta$

$\triangle BCD'$ vuông tại C có $BD' = \frac{b}{\sin \beta}$

$\triangle D'DB$ có $D'D = BD' \sin \alpha = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$

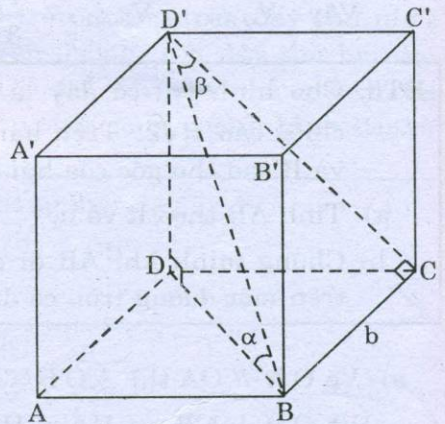
Bán kính đáy R của hình trụ ngoại tiếp hình hộp.

$$R = \frac{BD}{2} = \frac{1}{2} BD' \cos \alpha = \frac{b \cos \alpha}{2 \sin \beta}$$

$$\Rightarrow S = 2\pi R \cdot DD' = \frac{\pi b^2 \sin 2\alpha}{2 \sin^2 \beta}.$$

b) Ta có : $BD = \frac{b \cos \alpha}{\sin \beta}$; $AB = \sqrt{\frac{b^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta} - b^2} = \frac{b}{\sin \beta} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$

$$\text{Do đó : } V = \frac{b^3 \sin \alpha}{\sin^2 \beta} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} \quad \blacksquare$$



BT5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp trong hình trụ có đường kính đáy là $5a$. Góc của DB' và $(ABB'A')$ bằng 30° . Khoảng cách từ trục hình trụ và $(ABB'A')$ bằng $\frac{3}{2}a$. Tính theo a thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng có $AA' = OO'$ và $ABCD$ là hình chữ nhật.

Ta có : $DA \perp AB$ và $AA' \Rightarrow DA \perp (ABB'A')$

Vẽ $OH \parallel AD$ thì $OH = d(O, ABB'A') = \frac{3}{2}a$

AB' là hình chiếu vuông góc của DB lên $(ABB'A')$. Vậy $\widehat{DB'A} = 30^\circ$.

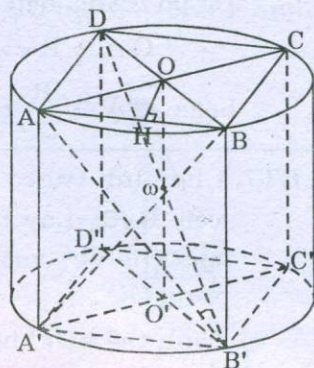
$$\triangle ADB' \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{AD}{AB'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AB' = \sqrt{3}AD = \sqrt{3}.2OH = 3a\sqrt{3}$$

$$\triangle ADB \text{ vuông} \Rightarrow AB^2 = DB^2 - AD^2 = 25a^2 - 9a^2 = (4a)^2$$

$$\triangle ABA' \text{ vuông} \Rightarrow AA'^2 = AB'^2 - A'B'^2 = 27a^2 - 16a^2 = 11a^2$$

$$\text{Do đó : } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AD.AB = a\sqrt{11}.(3a).(4a) = 12\sqrt{11}a^3 \quad \blacksquare$$



BT6. Cho hình trụ có hai đường tròn đáy tâm O và O' , bán kính R , chiều cao $R\sqrt{3}$. Gọi A là điểm cố định trên đường tròn (O) . Tìm B và C trên đường tròn (O') sao cho tam giác ABC đều.

Từ A vẽ $AA' \parallel OO' \Rightarrow AA' \perp mp$ chứa (O) .

Vẽ đường kính $A'O'D$.

Do $AB = AC$ nên $A'C = A'B$.

Mặt khác $O'B = O'C = R$

Vậy $O'A'$ là đường trung trực của BC

$\Rightarrow O'A' \perp BC$ tại trung điểm I .

Đặt $x = A'I$ ($0 \leq x \leq 2R$)

$\triangle A'BD$ vuông tại B nên $BA'^2 = A'I.A'D = 2Rx$

$$\text{và } IB^2 = IA'.ID = x(2R - x)$$

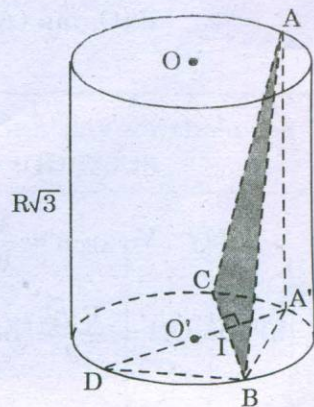
$$\text{Vậy } BC = 2BI = 2\sqrt{x(2R - x)}$$

$$\triangle A'AB \text{ vuông tại } A' \text{ nên } BA^2 = AA'^2 + BA'^2 = 2R^2 + 2Rx$$

$$\text{Mà } \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow BA^2 = BC^2 \Rightarrow 2R^2 + 2Rx = 4x(2R - x)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6Rx + 2R^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3R \pm R}{4} = \left[\begin{array}{l} R \\ \frac{R}{2} \end{array} \right.$$



Do đó $\triangle ABC$ đều khi

$$O'A' = R \Leftrightarrow BC \text{ là đường kính của } (O') \text{ mà vuông góc } O'A'$$

$$\text{hoặc } O'A' = \frac{R}{2} \Leftrightarrow BC \text{ là dây vuông góc } O'A' \text{ tại trung điểm của } O'A' \blacksquare$$

BT7. Cho hình trụ có đáy là hai hình tròn tâm O và O' , bán kính R , đường cao $R\sqrt{6}$. Lấy hai điểm A, B lần lượt nằm trên đường tròn O và O' sao cho OA vuông góc $O'B$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A, B và song song OO' .

a) Tính thể tích khối đa diện đỉnh O' , đáy là mặt cắt của (α) và hình trụ.

b) Chứng minh (α) tiếp xúc mặt trụ có trục OO' , bán kính đáy $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

a) (α) song song với OO' vậy cắt mặt trụ theo giao tuyến AD và BC song song OO' . Vậy mặt cắt là hình chữ nhật $ABCD$.

Do $OA \perp O'B$ mà $O'B \parallel OC$ nên $OA \perp OC$.

$\triangle OAC$ vuông cân cạnh R nên $AC = R\sqrt{2}$.

Vẽ $OH \perp AC$.

Do $BC \perp OH$ nên $OH \perp mp(ABC)$

Mà $OO' \parallel mp(ABC)$ nên

$$d(O, mp(ABC)) = d(O', mp(ABC))$$

$$= OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

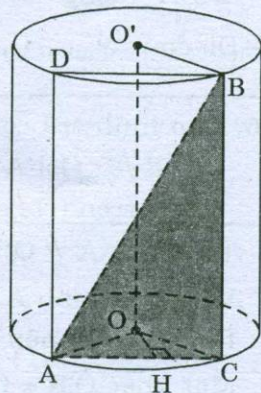
$$dt(ABCD) = AC \cdot BC = R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{6} = 2R^2\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{O'.ABCD} = \frac{1}{3} OH \cdot dt(ABCD) = \frac{1}{3} \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot 2R^2\sqrt{3} = \frac{R^3\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{b) Do } OH = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ nên } d(O, AC) = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Vậy AC tiếp xúc đường tròn tâm O , bán kính $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác (α) song song trục OO' , vậy (α) tiếp xúc mặt trụ trục OO' , bán kính đáy $R' = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ $\blacksquare$



BT8. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao 15, bán kính đáy 6. Tìm chiều cao và bán kính đáy của hình trụ có diện tích toàn phần lớn nhất nội tiếp trong hình nón. Tính diện tích toàn phần hình trụ đó.

Gọi r và h là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ nội tiếp trong hình nón với $0 < r < 6$ và $0 < h < 15$.

Ta có : $S_{tp} = 2S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Do $MN \parallel SH \Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{MN}{SH} \Rightarrow \frac{6-r}{6} = \frac{h}{15}$

$$\Rightarrow h = 15\left(1 - \frac{r}{6}\right) = 15 - \frac{5r}{2}$$

Vậy : $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(15 - \frac{5r}{2}\right)$

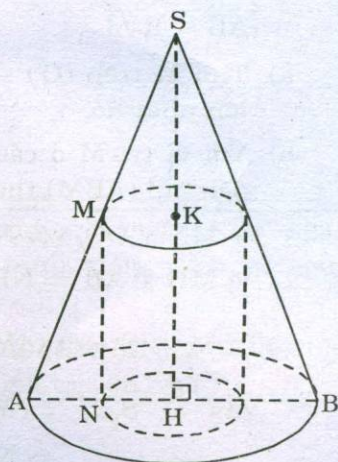
$$S(r) = 2\pi r^2 + 30\pi r - 5\pi r^2 = 30\pi r - 3\pi r^2$$

Ta có : $S'(r) = 30\pi - 6\pi r$

$$S'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 5$$

r	0	5	6
S'		+	-
S		75π CD	

Do đó : $S_{\max} = 75\pi \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ h = \frac{5}{2} \end{cases} \blacksquare$



BT9. Hình trụ có thể tích V không đổi. Tính bán kính đáy và chiều cao hình trụ sao cho diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

Gọi R và h là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

Ta có : $V = \pi R^2 h$ (không đổi)

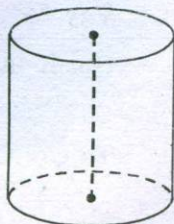
và $S_{tp} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = (Rh + R^2)2\pi$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương.

Ta có : $\frac{Rh}{2} + \frac{Rh}{2} + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{Rh}{2} \cdot \frac{Rh}{2} \cdot R^2}$

$$\Leftrightarrow Rh + R^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{R^4 h^2}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2 \cdot 4}} \Leftrightarrow S_{tp} \geq 3(2\pi)\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} \text{ (hằng số)}$$

Do đó S toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{Rh}{2} = R^2 \Leftrightarrow R = \frac{h}{2} \blacksquare$



BT10. Cho mặt trụ tròn xoay chiều cao h , đáy là hai đường tròn (C) và (C') tâm O và O' , bán kính đáy R . Trên (C) lấy dây cung AB sao cho $AB = R\sqrt{3}$.

- a) Tìm M trên (C) sao cho ΔABM có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.
- b) Với vị trí M ở câu a, gọi I là trung điểm OO' , tính khoảng cách từ I đến mp (ABM) theo R và h.

- a) Vẽ $MN \parallel OO'$ với $N \in (C')$ thì $MN \perp mp$ chứa (O) .

$$\text{Vẽ } MH \perp AB \Rightarrow NH \perp AB$$

Ta có : $S = dt (\Delta MAB) = \frac{1}{2} MH.AB = \frac{R\sqrt{3}}{2} MH$

Vậy $S_{\max} \Leftrightarrow MH_{\max} \Leftrightarrow NH_{\max}$

$$\Leftrightarrow N \equiv \text{điểm chính giữa } \widehat{AB} \text{ lớn.}$$

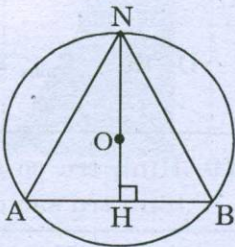
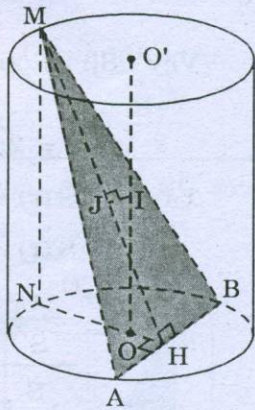
Lúc đó $\triangle NAB$ đều cạnh $R\sqrt{3}$ nên

$$NH = AB \frac{\sqrt{3}}{2} = (R\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R$$

Vậy $MH^2 = MN^2 + NH^2 = h^2 + \frac{9}{4}R^2$

$$\text{v\grave{a}} \quad S_{\max} = \frac{1}{2}MH.AB = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4h^2 + 9R^2}}{2} \cdot R\sqrt{3}$$

$$= \frac{R}{4} \sqrt{12h^2 + 27R^2}.$$



- b) Trong mp (MNOO') vẽ $IJ \perp MH$

Ta có : $AB \perp mp(MNH) \Rightarrow AB \perp IJ$

Vậy $IJ \perp mp(MAB)$

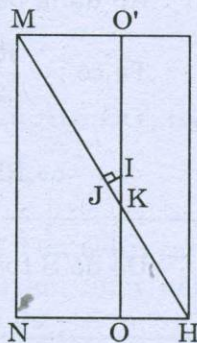
Gọi K là giao điểm MH và OO' .

$$\text{Ta có : } OK \parallel MN \Rightarrow \frac{OK}{MN} = \frac{HO}{HN} \Rightarrow OK = h \frac{\frac{R}{2}}{\frac{3}{2}R} = \frac{h}{3}$$

Vậy $IK = IO - OK = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$

và $KO = IO - IK = \frac{h}{2} - \frac{h}{6} = \frac{h}{3}$

Ta có : $\Delta JIK \simeq \Delta OHK \Rightarrow \frac{JI}{OH} = \frac{IK}{HK}$



$$\Rightarrow IJ \equiv d(I, mp(ABM)) = \frac{OH \cdot IK}{\sqrt{OK^2 + OH^2}}$$

$$\Rightarrow d(I, mp(ABM)) = \frac{\frac{R}{2} \cdot \frac{h}{6}}{\sqrt{\frac{h^2}{9} + \frac{R^2}{4}}} = \frac{Rh}{2\sqrt{4h^2 + 9R^2}} \quad \blacksquare$$

BT11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, đường cao SA = 2a. Mặt phẳng song song với đáy ABCD cắt hình chóp theo tứ giác MNPQ với M trên cạnh SA và AM = x (0 < x < a).

Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác MNPQ và đường sinh MA. Tìm x để thể tích khối trụ này đạt giá trị lớn nhất.

a) Do MN // AB $\Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB}$

$$\Rightarrow MN = \frac{AB \cdot SM}{SA} = \frac{a(2a - x)}{2a} = a - \frac{x}{2}$$

Do MNPQ là hình vuông nên R = IM = $\frac{MN}{\sqrt{2}}$

Vậy : $V_{\text{khối trụ}} = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{MN}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot AM = \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{x}{2} \right)^2 \cdot x = V$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương.

Ta có :

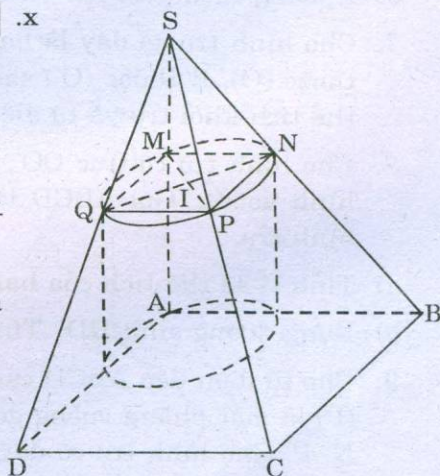
$$2a = \left(a - \frac{x}{2} \right) + \left(a - \frac{x}{2} \right) + x \geq 3 \sqrt[3]{\left(a - \frac{x}{2} \right)^2 \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow 8a^3 \geq 27 \cdot \frac{2V}{\pi} \Leftrightarrow V \leq \frac{4\pi a^3}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a - \frac{x}{2} = x \Leftrightarrow a = \frac{3x}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}a$$

Vậy $V_{\max} \Leftrightarrow AM = x = \frac{2}{3}a \quad \blacksquare$



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình trụ có bán kính đáy $R = 10$. Mặt phẳng song song trục và cách trục một khoảng bằng 6 tạo thành mặt cắt có diện tích là 48. Tính thể tích khối lăng trụ.
2. Cho hình trụ có bán kính đáy $R = 5$. Mặt phẳng song song trục và cách trục một khoảng bằng 3 cắt hai đáy theo dây $AB, A'B'$.
 - a) Biết chiều cao hình trụ $h = 15$. Tính diện tích của $ABB'A'$.
 - b) Nếu diện tích $ABB'A'$ bằng 96, tính thể tích khối trụ.
3. Cho hình trụ có bán kính đáy R , thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.
 - a) Tính diện tích thiết diện qua trục.
 - b) Tính diện tích toàn phần và thể tích khối trụ.
4. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π .
 - a) Tính diện tích toàn phần hình trụ.
 - b) Tính thể tích khối trụ.
5. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 4a$, cạnh bên bằng $\frac{5a}{2}$, chiều cao lăng trụ h .
 Tính diện tích toàn phần và thể tích hình trụ nội tiếp trong lăng trụ đó.
6. Cho hình trụ có O, O' là hai tâm của đường tròn đáy, $OO' = h$. Gọi A, B là hai điểm thay đổi lấy trên hai đường tròn $(O), (O')$ sao cho $AB = a$ không đổi. Chứng minh :
 - a) Góc giữa AB và OO' không đổi.
 - b) Khoảng cách giữa AB và OO' không đổi.
7. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính R . Lấy A thuộc (O) , B thuộc (O') sao cho $AB = 2R$, AB tạo với OO' góc 60° . Tính thể tích khối trụ và tứ diện $OO'AB$.
8. Cho hình trụ có trục OO' , bán kính đáy R sao cho thiết diện qua trục là hình vuông. Gọi $ABCD$ là hình vuông nội tiếp (O) , AA' là đường sinh hình trụ.
 - a) Tính tỉ số thể tích của hai hình chóp $O'.ABCD$ và $A'.ABCD$.
 - b) Dựng đường sinh DD' . Tính thể tích đa diện $A'.ABD'DC$.
9. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi O là tâm của $\triangle BCD$. Lấy I thuộc AO , (P) là mặt phẳng vuông góc OA tại I , (P) cắt AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P . Cho hình trụ có đáy là hình tròn (T) nội tiếp $\triangle MNP$, đáy kia nằm trên mp (BCD) . Tìm vị trí của I trên AO để thể tích khối trụ lớn nhất.

MẶT CẦU. THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Mặt cầu tâm I , bán kính R , kí hiệu $S(I, R)$

$$S(I, R) = \{M / IM = R\}$$

Hình cầu tâm I , bán kính R , kí hiệu $B(I, R)$

$$B(I, R) = \{M / IM \leq R\}$$

Thể tích hình cầu $B(I, R)$:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

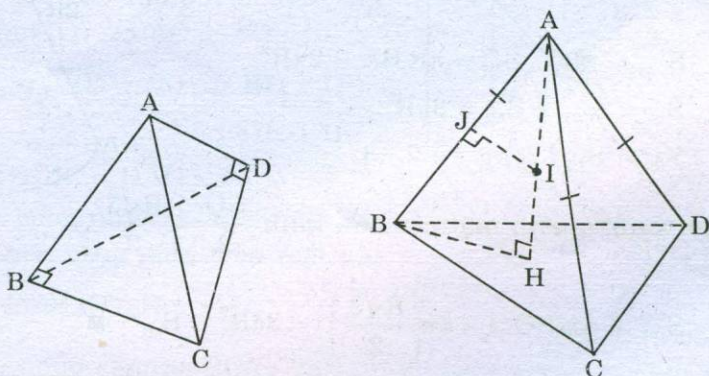
Diện tích mặt cầu $S(I, R)$:

$$S_{mc} = 4\pi R^2$$

Chú ý : Phương pháp xác định mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

a) Nếu $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 1v$

Hai điểm B và D cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC.



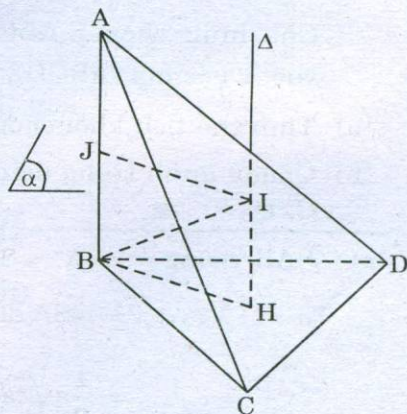
b) Nếu $AB = AC = AD = a$

- Vẽ $AH \perp mp(BCD)$ thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$.
- Trên $mp(ABH)$ vẽ đường trung trực của AB , đường này cắt AH tại I thì I là tâm mặt cầu $(ABCD)$.

$$\text{Do } \triangle AJI \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{AJ}{AH} = \frac{AI}{AB}$$

$$\Rightarrow AJ \cdot AB = AI \cdot AH$$

$$\Rightarrow R = IA = \frac{a^2}{2AH}$$



c) Nếu $AB \perp mp(BCD)$

- Vẽ (Δ) là trục đường tròn (BCD) .
- Vẽ (α) là mặt phẳng trung trực của AB .
- (Δ) cắt (α) tại I thì I là tâm mặt cầu $(ABCD)$.
- $R = IB = \sqrt{IH^2 + HB^2}$.

BT1. Thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều, bán kính đáy hình nón là R .

- Tính thể tích hình nón đã cho.
- Chứng minh rằng diện tích đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình đó tỉ lệ $1 : 2 : 3$.
- Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu mà đường kính bằng chiều cao của hình nón.

a) ΔSAB đều cạnh $2R$ nên $SO = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

Vậy $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} SO \cdot dt(\text{đáy}) = \frac{R\sqrt{3}}{3} (\pi R^2) = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$

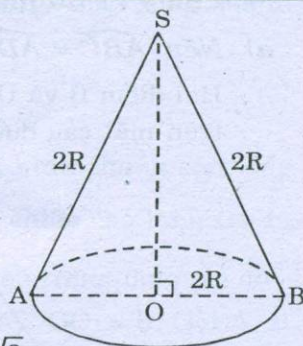
b) Ta có $S_{\text{đáy}} = \pi R^2$; $S_{\text{xq}} = \pi R \cdot SA = 2\pi R^2$

$$S_{\text{tp}} = S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}} = 3\pi R^2$$

Do đó : $S_{\text{đáy}} : S_{\text{xq}} : S_{\text{tp}} = 1 : 2 : 3$

c) Diện tích xung quanh mặt cầu bán kính $\frac{SO}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$$S_{\text{mc}} = 4\pi(SO^2) = 4\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi R^2 = S_{\text{tp}} \quad \blacksquare$$



BT2. Tốt nghiệp THPT 2006

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , SA vuông góc mp $(ABCD)$, $SB = a\sqrt{3}$.

- Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
- Chứng minh trung điểm của SC là tâm mặt cầu qua các điểm S, A, B, C, D .

a) ΔSAB vuông $\Rightarrow SA^2 = SB^2 - AB^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2$

Ta có : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot dt(ABCD)$

$$= \frac{1}{3} a\sqrt{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

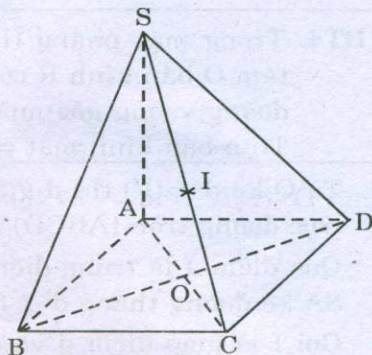
b) Do định lí ba đường vuông góc:

$$BC \perp BA \text{ nên } BC \perp SB$$

$$DC \perp DA \text{ nên } DC \perp SD$$

$$\text{Do đó: } \widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^\circ$$

Ba điểm B, A, D cùng nhìn SC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính SC. Nghĩa là tâm I của mặt cầu qua S, ABCD là trung điểm SC ■



BT3. Tuyển sinh ĐH khối D 2003

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau theo giao tuyến (Δ). Trên (Δ) lấy hai điểm A, B mà $AB = a$. Lấy C trên (P) và D trên (Q) sao cho AC và BD cùng vuông góc (Δ) mà $AC = AB = BD$. Tính bán kính mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D và khoảng cách từ A đến mp (BCD).

* Do hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc nhau theo giao tuyến (Δ) mà $AC \perp (\Delta)$, AC nằm trên (P) nên $AC \perp mp(Q) \Rightarrow AC \perp AD$.

$$\text{Tương tự: } BD \perp (\Delta) \Rightarrow BD \perp (P) \\ \Rightarrow DB \perp BC$$

$$\text{Ta có: } \widehat{DBC} = \widehat{DAC} = 1v$$

B và A cùng nhìn DC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính DC, $R = \frac{CD}{2}$.

$$\triangle ABC \text{ vuông cân} \Rightarrow BC^2 = 2a^2$$

$$\triangle BCD \text{ vuông} \Rightarrow R = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 2a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

* Ta có: (P) $\perp$ (Q) mà $BD \perp \Delta$ nên $DB \perp (P)$.

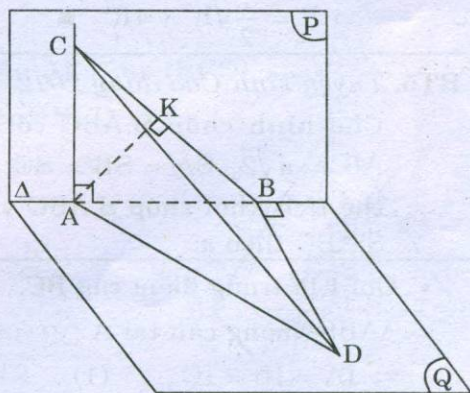
Do đó mp (BCD) $\perp$ mp (P) theo giao tuyến BC.

Từ A vẽ $AK \perp BC$ thì $AK \perp mp(BCD)$.

$$\text{Do đó: } AK = d(A, BCD) = \frac{AC \cdot AB}{BC} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \blacksquare$$

* **Lưu ý:** Có thể tính $V_{C.ABD} = \frac{1}{6} CA \cdot BA \cdot BD$

$$\Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{3V_{C.ABD}}{dt(\triangle BCD)}$$



BT4. Trong mặt phẳng (P) cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R có hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau. Trên đường vuông góc mp(P) tại A lấy điểm S sao cho SA = h không đổi. Tính bán kính mặt cầu qua S, A, B, C, D theo R và h.

Từ O kẻ $d \perp (P)$ thì $d \parallel SA$ và d là trục đường tròn (ABCD)

Qua điểm J là trung điểm của SA kẻ đường thẳng $d' \perp SA$.

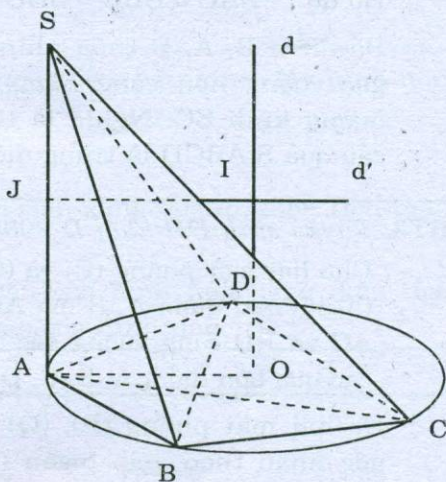
Gọi I là giao điểm d và d' thì I là tâm mặt cầu qua S, A, B, C, D

$$\Delta SJI \perp \text{tại } J$$

$$\Rightarrow R^2 = SI^2 = SJ^2 + IJ^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{h^2}{4} + R^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 4R^2} \quad \blacksquare$$



BT5. Tuyển sinh Cao đẳng 2012

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, $SA = SB = SC$. Góc của SA và mp (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC theo a.

- Gọi I là trung điểm của BC.

ΔABC vuông cân tại A

$$\Rightarrow IA = IB = IC \quad (1)$$

Mà $SA = SB = SC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SI$ là trục đường tròn (ABC)

$$\Rightarrow SI \perp (ABC)$$

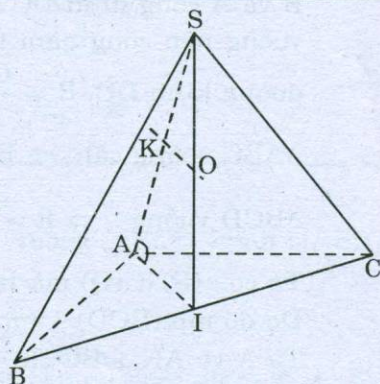
Vậy góc của SA và mp (ABC) là $\widehat{SAI} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có : } BC = AB\sqrt{2} = 2a \Rightarrow AI = \frac{BC}{2} = a$$

$$\Delta SAI \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SI}{AI} = \sqrt{3} \Rightarrow SI = a\sqrt{3}$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SI \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

- Trong mp (SAI), đường trung trực của SA cắt SI tại O thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.



$$\text{Ta có : } \triangle SKO \sim \triangle SIA \Rightarrow \frac{SK}{SI} = \frac{SO}{SA}$$

$$\Rightarrow R = SO = \frac{SK \cdot SA}{SI} = \frac{SA^2}{2SI} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Cách khác : Do $O \in (SBC)$ nên bán kính mặt cầu qua S, A, B, C cũng là bán kính đường tròn (SBC).

$$\text{Vậy : } dt(\triangle SBC) = \frac{SB \cdot SC \cdot BC}{4R} = \frac{1}{2} SI \cdot BC$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot \frac{SB^2}{SI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SI^2 + IB^2}{SI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a^2 + a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \quad \blacksquare$$

BT6. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = a$, $BC = b$. $\triangle BCD$ vuông tại D. Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông góc nhau. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo a và b.

Gọi I là trung điểm BC.

$\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AI \perp BC$.

Do mp (ABC) vuông góc mp (BCD) nên $AI \perp mp(BCD)$.

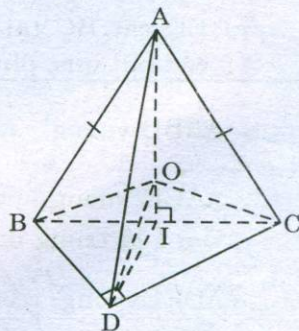
Do đó AI là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$

$\Rightarrow$ Tâm O của mặt cầu (ABCD) nằm trên AI sao cho $OA = OB = OC = OD = R$.

$$\triangle ABI \text{ vuông} \Rightarrow AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$\text{Ta có : } dt(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AI \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2AB^2}{AI} = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{4a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \quad \blacksquare$$



BT7. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2r$ nằm trong mặt phẳng (α) . Gọi H là điểm đối xứng của O qua A, lấy điểm S sao cho $SH = 2r$ và SH vuông góc mp (α) . Tính diện tích mặt cầu qua S và đường tròn tâm O theo r.

Từ O vẽ đường thẳng d vuông góc (α) thì tâm ω của mặt cầu cần tìm phải nằm trên d. Gọi bán kính R của mặt cầu thì $R = \omega S = \omega A = \omega B$.

Vẽ $SI \perp d$ thì $SI = 2r$, ta có : $\omega I = |2r - \omega O|$

c) Do BD là đường trung bình của $\triangle MEC \Rightarrow B$ là trung điểm MC

$$\text{Ta có : } AB = \frac{MC}{2} = a \Rightarrow \triangle MAC \text{ vuông tại } C \Rightarrow AM \perp AC$$

mà $AM \perp CE$ nên $AM \perp mp(ACE)$

Do giao tuyến hai mặt phẳng (ADE) và (ABC) là AM mà $AC \perp AM$,
 $AE \perp AM$ nên $\widehat{EAC}$ là góc phẳng nhị diện.

$$\triangle EAC \text{ vuông} \Rightarrow \tan \widehat{EAC} = \frac{EC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{EAC} = \frac{\pi}{3} \quad \blacksquare$$

BT9. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD hình vuông cạnh a. $SA = SB = a$.
 Mặt bên (SAB) vuông góc với đáy. Tính diện tích xung quanh mặt
 cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Gọi H là trung điểm AB

$\triangle SAB$ đều nên $SH \perp AB$

$(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

Gọi I là tâm hình vuông ABCD

Vẽ $d \perp (ABCD)$ tại O thì d là trục đường tròn (ABCD) và $d \parallel SH$

Gọi G là tâm của $\triangle$ đều ABS

Vẽ $d' \perp (SAB)$ tại G thì d' là trục
 đường tròn (SAB) và $d' \parallel HI$

Gọi O là giao điểm d và d'

Do $O \in d \Rightarrow OA = OB = OC = OD$ (1)

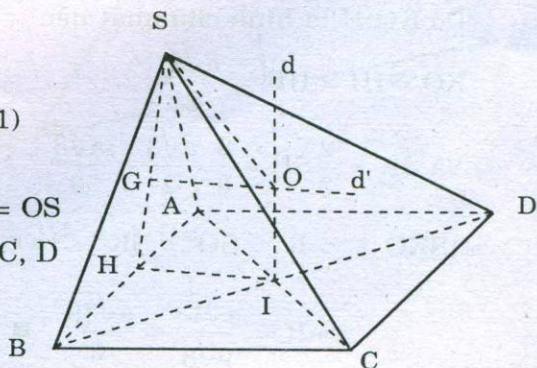
Do $O \in (d') \Rightarrow OS = OA = OB$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow OA = OB = OC = OD = OS$

Vậy O là tâm mặt cầu qua S, A, B, C, D

Do OGH I là hình chữ nhật nên

$$OG = HI = \frac{a}{2}$$



$$\triangle SAB \text{ đều nên } SH = \frac{2}{3}SH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle SOG \perp \Rightarrow R^2 = SO^2 = SG^2 + GO^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{a^2}{4} = \frac{21a^2}{36}$$

Vậy diện tích xung quanh mặt cầu qua S, A, B, C, D

$$S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{21a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3} \quad \blacksquare$$

BT10. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang đáy lớn $AD = 2a$. $\triangle ABC$ đều cạnh a , $\triangle SAC$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và bán kính mặt cầu qua S, A, C, D.

- Gọi H là trung điểm AC

$\triangle SAC$ đều $\Rightarrow SH \perp AC$

$(SAC) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$Dt(ABCD) = \frac{AB}{2}(BC + AD) = \frac{a}{2}(a + 2a) = \frac{3a^2}{2}$$

$$\triangle SAC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

- Gọi I trung điểm AD thì

$$IA = ID = \frac{AD}{2} = a$$

ABCI hình bình hành $\Rightarrow IC = a$

Do $IA = ID = IC$ nên $\triangle ACD \perp$ tại C và I là tâm đường tròn (ACD)

Vẽ $d \perp (ACD)$ tại I thì $d \parallel SH$ và d là trục đường tròn (ACD)

Vẽ $d' \perp (SAC)$ tại K là tâm $\triangle$ đều SAC thì d' là trục đường tròn (SAC) và $d' \parallel HI$

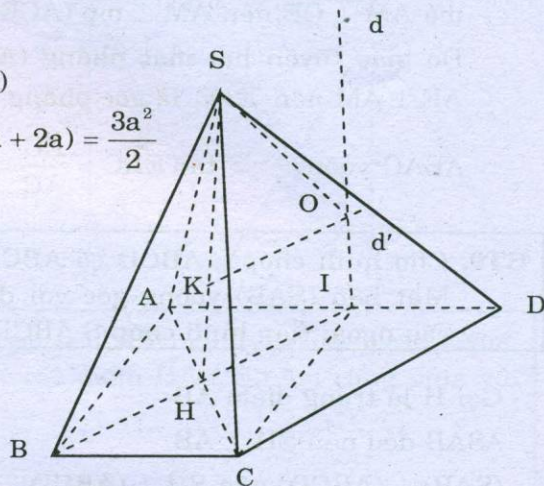
Do KOIH là hình chữ nhật nên

$$KO = IH = HB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Và } SK = \frac{2}{3}SH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle SKO \perp \Rightarrow R^2 = SO^2 = SK^2 + KO^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{4} = \frac{13a^2}{12}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{39}}{6} \quad \blacksquare$$



BT11. Cho tứ diện ABCD có $AD = a\sqrt{2}$, $AB = AC = BC = BD = a$, mặt phẳng (ACD) vuông góc mặt phẳng (BCD).

a) Tính thể tích tứ diện ABCD.

b) Tính diện tích xung quanh mặt cầu qua A, B, C, D.

- a) Gọi H là trung điểm CD

$\triangle BCD$ cân $\Rightarrow BH \perp CD$

$$(\triangle ACD) \perp (\triangle BCD) \Rightarrow BH \perp (\triangle ADC)$$

Ta có $BC = BD = BA$ nên $HA = HC = HD$

(do các đoạn xiên bằng nhau nên các hình chiếu bằng nhau)

Vậy $\triangle ACD$ vuông tại A.

$$dt(\triangle ACD) = \frac{1}{2} AD \cdot AC = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle ACD \perp \Rightarrow AH = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 2a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle BAH \perp \Rightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$b) \triangle ACD \perp \Rightarrow CD^2 = AD^2 + AC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

H là tâm đường tròn qua A, C, D và $BH \perp (\triangle ADC)$

Nên BH là trục đường tròn ($\triangle ADC$)

Trong mp(BCD) vẽ d là đường trung trực của BC

d cắt BC và BH tại I và O

$$O \in d \Rightarrow OB = OC$$

$$O \in BH \Rightarrow OA = OC = OD$$

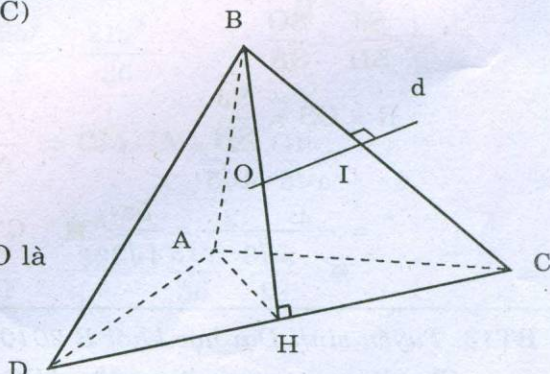
Vậy $OA = OB = OC = OD$ nên O là tâm mặt cầu qua A, B, C, D

$$\triangle BIO \sim \triangle BHC \Rightarrow \frac{BI}{BH} = \frac{BC}{BC}$$

$$\Rightarrow R = OB = \frac{BI \cdot BC}{BH} = \frac{BC^2}{2BH} = \frac{a^2}{2\sqrt{BA^2 - AH^2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}}} = a$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2. \blacksquare$$



BT12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a , cạnh bên $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tính:

a) Góc của mặt bên và đáy.

b) Bán kính mặt cầu qua S, A, B, C, D.

a) Gọi H là tâm hình vuông ABCD thì $SH \perp (ABCD)$

Gọi I là trung điểm AB thì HI và SI cùng vuông góc AB

Vậy $\widehat{SIH}$ là góc của mặt bên và đáy

$$\Delta SIA \perp \Rightarrow SI^2 = SA^2 - IA^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = a^2$$

$$\Delta HIS \perp \Rightarrow \cos \widehat{SIH} = \frac{HI}{SI} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

Do đó: góc của mặt bên và đáy là 60° .

b) Trong mp(SAC) vẽ d là đường trung trực của SA cắt SH tại O

$O \in SH$ là trục đường tròn (ABC) nên $OA = OB = OC = OD$ (1)

$O \in d \Rightarrow OS = OA$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu qua S, A, B, C, D

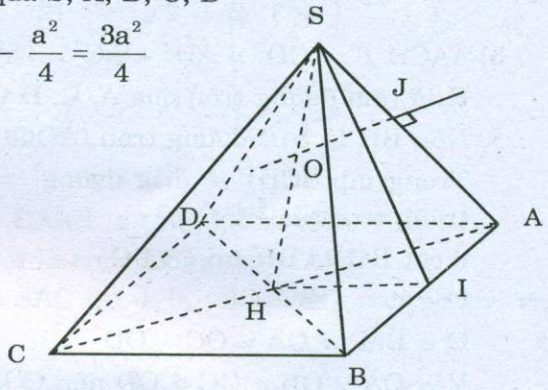
$$\Delta SHI \perp \Rightarrow SH^2 = SI^2 - HI^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Delta SJO \sim \Delta SHA$$

$$\Rightarrow \frac{SJ}{SH} = \frac{SO}{SA}$$

$$\Rightarrow R = OS = \frac{SJ}{SH}$$

$$= \frac{\frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{5a}{4\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$



BT13. Tuyển sinh Đại học khối B 2010

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc của hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm $\Delta A'BC$. Tính thể tích lăng trụ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $G.ABC$.

- Gọi H là trung điểm BC

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AH \perp BC$$

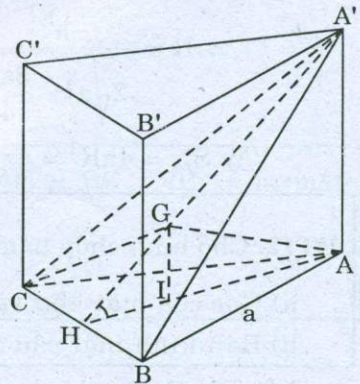
$$\text{Mà } AA' \perp \text{mp}(ABC) \Rightarrow A'H \perp BC$$

$$\text{Vậy } \widehat{A'HA} = 60^\circ$$

$$\Delta A'AH \text{ vuông} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{AA'}{AH} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{3}a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$\text{và } \cos 60^\circ = \frac{AH}{A'H} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'H = 2AH = a\sqrt{3}$$



$$AA' = CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} \\ = b\sqrt{\tan^2 \alpha \cot^2 \beta - 1}$$

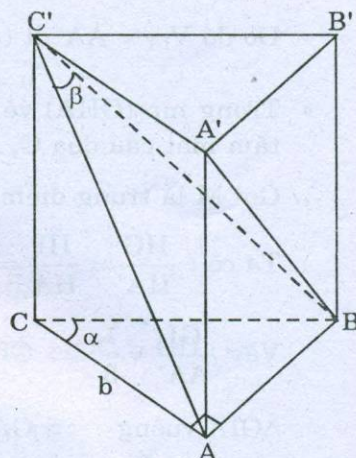
$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}b^3 \tan \alpha \sqrt{\tan^2 \alpha \cot^2 \beta - 1}.$$

b) Ta có : $A'C' \perp (ABB'A') \Rightarrow A'C' \perp A'B$

Bốn điểm A, C, A', B' nhìn đoạn BC' dưới một góc vuông, do đó chúng thuộc mặt cầu đường kính BC'. Đó là mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tâm mặt cầu là trung điểm O của BC'.

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = OB = \frac{1}{2}BC' = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + CC'^2} = \frac{b \tan \alpha}{2 \sin \beta}$$

$$\Rightarrow S = 4\pi R^2 = \pi b^2 \frac{\tan^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \quad \blacksquare$$



BT15. Cho tứ diện đều S.ABC cạnh là a. Gọi I là trung điểm của đường cao SH của tứ diện.

- Chứng minh rằng ba đường thẳng IA, IB, IC vuông góc với nhau từng đôi một.
- Xác định tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện IABC và tính bán kính của nó theo a.

$$\text{a) } \triangle SHB \text{ vuông tại H} \Rightarrow SH^2 = SB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

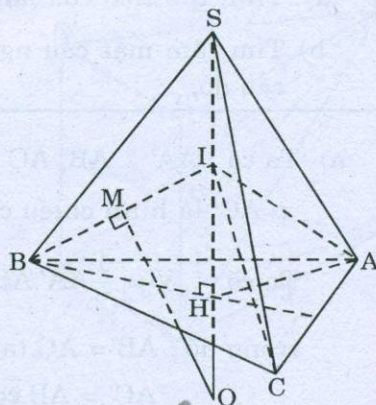
$$\triangle IHB \text{ vuông} \Rightarrow IB^2 = IH^2 + HB^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$I \in SH \Rightarrow IA = IB = IC$$

$$\text{Xét } \triangle IBC \text{ có : } IB^2 + IC^2 = BC^2 \Rightarrow IB \perp IC$$

Tương tự ta có $IC \perp IA$; $IA \perp IB$.

- Vì I cách đều A, B, C nên tâm hình cầu đi qua bốn điểm I, A, B, C phải nằm trên IH. Vẽ đường trung trực của đoạn IB trong mp (BIH). Đường này cắt IH kéo dài tại O. Ta có : $OA = OB = OC = OI$, vậy O là tâm hình cầu qua bốn điểm A, B, C, I.



$$\text{Ta có : } \triangle IBH \sim \triangle IOM \Rightarrow \frac{IO}{IB} = \frac{IH}{IM}$$

$$\Rightarrow IO = \frac{IB.IH}{IM} = \frac{2IM.IH}{IM} = 2IH = 2 \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \blacksquare$$

BT16. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có các đáy là tam giác đều cạnh đáy bằng a . Gọi D là trung điểm của AB , E là một điểm trên cạnh A_1C_1 , đường thẳng DE tạo với (ABC) và tạo với (AA_1C_1C) các góc tương ứng là α và β .

- Tính thể tích lăng trụ đã cho theo a, α, β .
- Tính bán kính hình cầu có tâm nằm trên DE và tiếp xúc với các mặt (ABC) và (AA_1C_1C) .

- Từ E kẻ đường thẳng song song AA_1 , cắt AC tại M .

Ta có : $EM \perp mp (ABC)$.

DM là hình chiếu của DE xuống mp (ABC) nên $\widehat{EDM} = \alpha$.

Từ D kẻ $DN \perp AC$ suy ra $DN \perp mp (AA_1C_1C)$.

Vậy : $\widehat{DEN} = \beta$.

$$\text{Ta có : } DN = AD.\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Trong } \triangle DNE \text{ vuông có : } DE = \frac{DN}{\sin \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{4\sin \alpha}$$

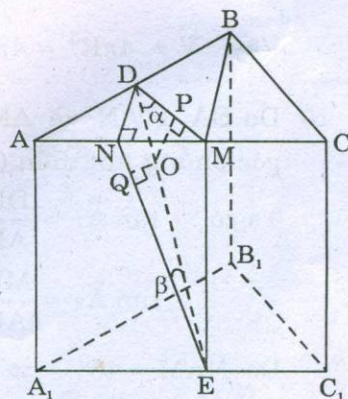
$$\text{Trong } \triangle DEM \text{ vuông có : } EM = DE.\sin \beta = \frac{a\sqrt{3}}{4\sin \alpha}.\sin \beta$$

$$\text{Diện tích đáy lăng trụ } S_{\text{đáy}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Thể tích lăng trụ là : } V = S_{\text{đáy}}.EM = \frac{3a^3\sin \beta}{16\sin \alpha}$$

- Gọi O là tâm hình cầu; trong (DEM) hạ $OP \perp DM$; trong (DEN) hạ $OQ \perp NE$. Do $S(O; R)$ tiếp xúc (ABC) và (AA_1C_1C) . Ta có $OP = PQ = R$.

$$\text{Trong } \triangle DOP \text{ vuông có } DO = \frac{OP}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$$



- ΔABC có $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên ΔABC là tam giác đều.

Gọi G là tâm của ΔABC , do $SA = SB = SC$,
 $GA = GB = GC$ nên $SG \perp (ABCD)$

Do $MN \perp (ABCD)$ nên $MN \parallel SG$ và $N \in BD$

Ta có ΔSBG vuông nên

$$SG^2 = SB^2 - BG^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SG \cdot dt(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}.$$

- Gọi I là tâm mặt cầu qua S, A, B, C thì $I \in SG$ là trục đường tròn (ABC)

Ta có : $IS = IB = R \Rightarrow \Delta ISB$ cân

Gọi H là trung điểm của SB thì $IH \perp SB$

Ta có : $\mathcal{P}_{S/(IHBG)} = SI \cdot SG = SH \cdot SB$

$$\Rightarrow R = SI = \frac{SH \cdot SB}{SG} = \frac{SB^2}{2SG} = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Ta có : } IG = SG - SI = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$NG = OG + ON = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta AGN \text{ vuông} \Rightarrow IN^2 = IG^2 + GN^2 = \frac{6a^2}{144} + \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{24} + \frac{a^2}{3} = \frac{3a^2}{8}$$

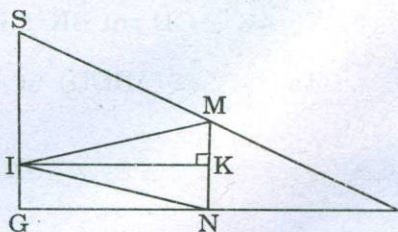
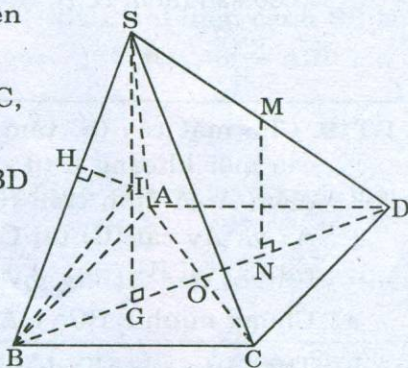
$$\Rightarrow IN = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = R \Rightarrow N \in \text{mặt cầu qua } SABC$$

$$\text{Ta có : } IG = \frac{a\sqrt{6}}{12}, SG = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow IG = \frac{1}{4}SG \text{ mà } MN = \frac{1}{2}SG$$

$$\Rightarrow MN = 2IG$$

Gọi K là trung điểm của MN . Do $IGNK$ là hình chữ nhật nên $IK \perp MN$.
 Vậy $IM = IN = R$.



Do đó sáu điểm S, B, A, C, M, N cùng nằm trên mặt cầu tâm I, bán kính

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \blacksquare$$

BT19. Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính R. Mặt phẳng (P) cách tâm mặt cầu một khoảng h ($0 < h < R$) cắt mặt cầu theo đường tròn (C). Lấy điểm A cố định trên (C). Góc vuông xAy quay quanh A trên mp (P), Ax và Ay cắt (C) tại C và D. Đường thẳng d vuông góc mp (P) tại A cắt (S) tại B.

a) Chứng minh : $BC^2 + AD^2$ và $BD^2 + AC^2$ là không đổi.

b) Tìm vị trí của CD để diện tích ΔBCD lớn nhất.

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mp (P) thì H là tâm của (C) và $OH = h$.

Ta có : $\widehat{CAD} = 1v$ nên CD là đường kính của (C).

$$\Delta ACD \text{ vuông} \Rightarrow AD^2 + AC^2 = CD^2 \quad (1)$$

$$\Delta BAC \text{ vuông} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (2)$$

$$\Delta ABD \text{ vuông} \Rightarrow BA^2 + AD^2 = BD^2 \quad (3)$$

Từ (1) và (2), ta có :

$$BC^2 + AD^2 = (AB^2 + AC^2) + (CD^2 - AC^2) = AB^2 + CD^2$$

Gọi I là trung điểm AB. Ta có $OI \perp AB$.

OIAH là hình chữ nhật nên : $AB = 2AI = 2OH = 2h$

$$\Delta ACD \text{ vuông} \Rightarrow CD = 2AH$$

$$\text{Do đó : } BC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2 = 4(OH^2 + AH^2) = 4OA^2 = 4R^2 \text{ (hằng số)}$$

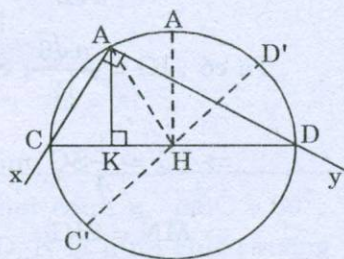
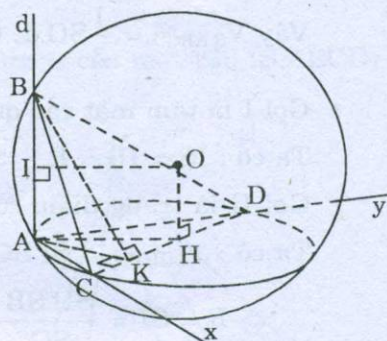
$$\begin{aligned} \text{Từ (2) và (3) : } BD^2 + AC^2 &= (AB^2 + AD^2) + (BC^2 - AB^2) \\ &= AD^2 + BC^2 = 4R^2 \text{ (hằng số)} \end{aligned}$$

b) Vẽ $AK \perp CD$ thì $BK \perp CD$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } dt(\Delta BCD) &= \frac{1}{2}BK \cdot CD = \frac{BK}{2}(2AH) \\ &= BK \cdot \sqrt{OA^2 - OH^2} \\ &= BK \cdot \sqrt{R^2 - h^2} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } dt(\Delta BCD) \max \Leftrightarrow BK \max$$

$$\Leftrightarrow AK \max \Leftrightarrow K \equiv H \Leftrightarrow CD \perp AH \quad \blacksquare$$



BT20. Cho tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc đáy (ABC) , nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông. Biết $SB = a\sqrt{2}$, góc $BSC = 45^\circ$, $\widehat{ASB} = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

- a) Chứng minh BC vuông góc SB . Từ đó xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.
- b) Tính thể tích tứ diện $S.ABC$ theo a, α . Với giá trị nào của α thì thể tích đó lớn nhất ?

- a) • Từ A vẽ AH vuông góc SB . Do mp (ASB) vuông góc mp (SBC) nên AH vuông góc mp $(SBC) \Rightarrow AH \perp BC$.

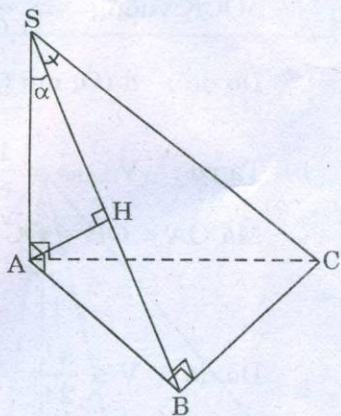
Ta có : $BC \perp AH$ và $SA \Rightarrow BC \perp mp(SAB)$

$$\Rightarrow BC \perp SB$$

- $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 1v \Rightarrow A$ và B nhìn SC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính SC . Tâm O là trung điểm SC .

$$\Delta SBC \text{ vuông cân} \Rightarrow SC = SB\sqrt{2} = 2a$$

$$\text{Vậy } R = \frac{SC}{2} = a.$$



b) ΔSAB vuông $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{SA}{SB} \Rightarrow SA = SB \cos \alpha = a\sqrt{2} \cos \alpha$

$$\text{và } \sin \alpha = \frac{AB}{SB} \Rightarrow AB = SB \sin \alpha = a\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot dt(\Delta ABC) = \frac{1}{6} SA \cdot AB \cdot BC$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6} (a\sqrt{2} \cos \alpha)(a\sqrt{2} \sin \alpha)(a\sqrt{2})$$

$$V_{S.ABC} = \frac{2}{6} a^3 \sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2} \sin 2\alpha = V$$

- Ta có $V \leq \frac{a^3}{3} \sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Do đó } V_{\max} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} \text{ khi } \alpha = \frac{\pi}{4} \blacksquare$$

BT21. Cho tam diện ba mặt vuông Oxyz. Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy A, B, C với OA = a, OB = b, OC = c.

a) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC).

b) Giả sử A cố định còn B, C thay đổi luôn thỏa OB + OC = OA. Hãy xác định B, C sao cho thể tích tứ diện OABC lớn nhất. Chứng minh rằng khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC nhỏ nhất.

a) Vẽ $OK \perp AB$ thì $AB \perp mp$ (OCK)

Vẽ $OH \perp CK$ thì $OH \perp mp$ (ABC)

$$\Delta OAB \text{ vuông} \Rightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

$$\Delta OCK \text{ vuông} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\text{Do đó : } d(O, mp(ABC)) = OH = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2}}.$$

b) Ta có : $V_{O.ABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{abc}{6} = V$

$$\text{Mà } OA = OB + OC \Rightarrow a = b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

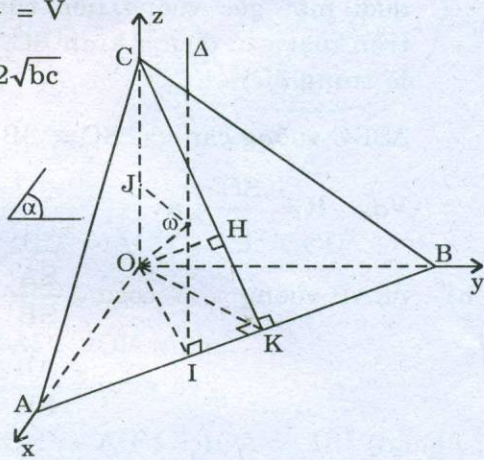
$$\Rightarrow bc \leq \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Do đó : } V \leq \frac{a^3}{24}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + c \\ b = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = c = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{O.ABC} \text{ max} \Leftrightarrow b = c = \frac{a}{2}.$$



• Gọi I là trung điểm AB, qua I vẽ đường thẳng $\Delta // OC$.

Mặt phẳng trung trực của OC cắt (Δ) tại ω .

Do $OJ\omega I$ là hình chữ nhật nên $\omega I = OJ = \frac{c}{2}$

$$\Delta \omega OI \text{ vuông} \Rightarrow R^2 = \omega O^2 = \omega I^2 + OI^2 = \frac{c^2}{4} + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

Do bất đẳng thức Bunhiacopski :

$$a = |1b + 1c| \leq \sqrt{2}\sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow b^2 + c^2 \geq \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Do đó : } R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2 + c^2}{4} \geq \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8} \text{ (hằng số)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{1} = \frac{c}{1} \\ a = b + c \end{cases} \Leftrightarrow b = c = \frac{a}{2}$$

$$\text{Do đó } R_{\min} \Leftrightarrow b = c = \frac{a}{2} \blacksquare$$

* **Lưu ý:** Nếu khối chóp có thể tích V , diện tích toàn phần S_{tp} , bán kính

$$\text{mặt cầu nội tiếp hình chóp (nếu có)} \quad \boxed{r = \frac{3V}{S_{tp}}}$$

BT22. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao $SO = 1$ và cạnh đáy $2\sqrt{6}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và AB . Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.AMN$.

Gọi O là tâm của Δ đều ABC thì $SO \perp (ABC)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } dt(\Delta AMN) &= \frac{1}{2} AN \cdot AM \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{6}) (\sqrt{6}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{1}{3} (1) \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có } OM = \frac{1}{3} BM = \frac{1}{3} (2\sqrt{6}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \Delta SOM \perp &\Rightarrow SM^2 = SO^2 + OM^2 \\ &= 1 + 2 = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Vậy $dt(\Delta SMA) = dt(\Delta SNA)$

$$= \frac{1}{2} SM \cdot AM = \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Gọi J là trung điểm MN

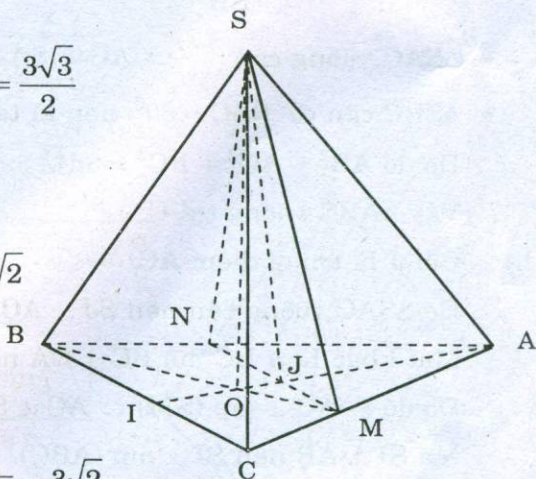
Do ΔSNM cân tại $S \Rightarrow SJ \perp NM$

$$\text{Và } SJ^2 = SM^2 - JM^2 = 3 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 = \frac{6}{4}$$

$$\Rightarrow dt(\Delta SMN) = \frac{1}{2} SJ \cdot NM = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{3}{2}$$

Do đó: $S_{tp} = dt(\Delta AMN) + dt(\Delta SAM) + dt(\Delta SAN) + dt(\Delta SMN)$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} (\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1)$$



Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp chóp S.AMN

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1} \cdot \blacksquare$$

BT23. Cho tứ diện S.ABC có các cạnh bên $SA = SB = SC = d$ và $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$.

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông.
- Tính thể tích của tứ diện S.ABC theo d.
- Tính bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện S.ABC.

a) • Gọi I là trung điểm AB.

Do $\triangle SBA$ cân tại S $\Rightarrow SI \perp BA$ và $\widehat{BSI} = \frac{1}{2}\widehat{BSC} = 60^\circ$

$$\text{Vậy } \sin 60^\circ = \frac{IB}{SB} \Rightarrow BA = 2IB = 2d \frac{\sqrt{3}}{2} = d\sqrt{3}$$

- $\triangle SAC$ vuông cân $\Rightarrow AC = SA\sqrt{2} = d\sqrt{2}$
- $\triangle SBC$ cân có $\widehat{BSC} = 60^\circ$ nên là tam giác đều $\Rightarrow BC = d$.

$$\text{Do đó } AB^2 = AC^2 + BC^2 = 3d^2.$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại C.

b) Gọi J là trung điểm AC.

Do $\triangle SAC$ vuông cân nên $SJ \perp AC$.

Mặt khác $IJ \parallel BC$ mà $BC \perp CA$ nên $IJ \perp AC$.

Do đó : $AC \perp mp(SIJ) \Rightarrow AC \perp SI$

Mà $SI \perp AB$ nên $SI \perp mp(ABC)$.

$$\text{Do đó : } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SI \cdot dt(\triangle ABC) = \frac{1}{6}SI \cdot CA \cdot CB$$

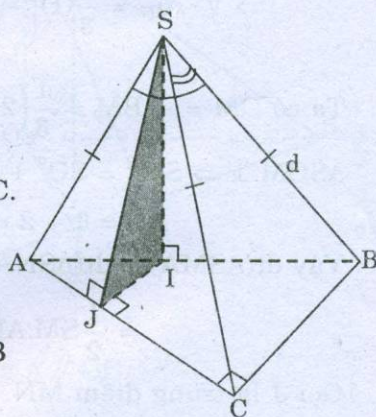
$$\text{Mà } \triangle ASI \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{SI}{SA} \Rightarrow SI = \frac{d}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{d}{2} \cdot d\sqrt{2} \cdot d = \frac{d^3\sqrt{2}}{12}.$$

c) Ta có : $S_{tp} = dt(\triangle SAB) + dt(SAC) + dt(SBC) + dt(\triangle ABC)$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{1}{2}SLAB + \frac{1}{2}SA \cdot SC + \frac{1}{2}SB \cdot SC \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}CA \cdot CB$$

$$\Rightarrow S_{tp} = \frac{d}{4} \cdot d\sqrt{3} + \frac{d^2}{2} + \frac{1}{2}d^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}d^2\sqrt{2} = \frac{d^2}{4}(2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{2})$$



Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $S.ABC$.

$$\text{Ta có : } V = \frac{1}{3} S_{tp} \cdot r \Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{\frac{d^3 \sqrt{2}}{4}}{\frac{d^2}{4} (2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2)} = \frac{d\sqrt{2}}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)} \quad \blacksquare$$

BT24. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = \alpha$, khoảng cách giữa SA và BC là d .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

b) Tính thể tích của khối cầu nội tiếp khối chóp đó.

a) Gọi M là trung điểm của BC . Trong $\triangle SMA$ kẻ $MN \perp SA$.

Vì $BC \perp SM$ và $BC \perp AM$ nên $BC \perp MN$. Do đó MN chính là đường vuông góc chung giữa SA và BC . Vậy $MN = d$.

Gọi độ dài của cạnh đáy là x .

$$\triangle SBM \text{ vuông} \Rightarrow SB = \frac{MB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{x}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Ta có : } \triangle SOA \sim \triangle MNA \Rightarrow \frac{SO}{MN} = \frac{SA}{MA}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{SA}{MA} \cdot MN = \frac{x \cdot d}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{d}{\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Trong $\triangle SOA$ vuông có :

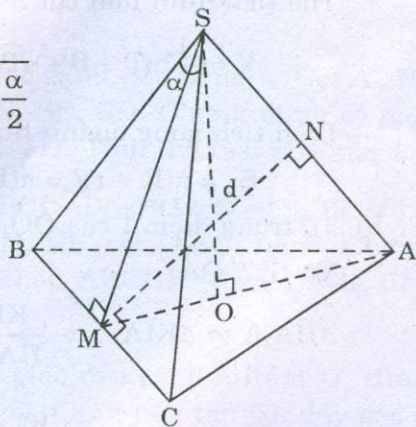
$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = \frac{x^2 \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot SO^2 = \frac{4d^2}{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Vậy : } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot dt(\triangle ABC) = \frac{d^3}{3 \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

b) Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp.

$$\text{Ta có : } S_{tp} = \frac{d^2 \sqrt{3} \left(1 + \sqrt{3} \cot \frac{\alpha}{2} \right)}{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}r.S_{tp} \Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{d}{\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \sqrt{3}\cot\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow V_{\text{khối cầu nt}} = \frac{1}{3}\pi r^3 \quad \blacksquare$$

BT25. Cho hình nón cụt, bán kính đáy lớn và bán kính đáy nhỏ là R và r ($r < R$), đường sinh của nón cụt là $l = R + r$.

- Tính thể tích V và diện tích xung quanh S_1 của hình nón cụt.
- Tính bán kính mặt cầu nội tiếp trong hình nón cụt.
- Tính diện tích S_2 của mặt cầu nội tiếp nón cụt. Chứng minh rằng tỉ số $k = \frac{S_2}{S_1} < 1$.

a) Vẽ $A_1H \perp AB$.

$$\triangle AA_1H \text{ vuông} \Rightarrow A_1H^2 = AA_1^2 - AH^2$$

$$\Rightarrow A_1H = h = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

Thể tích hình nón cụt :

$$V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'}) = \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

Diện tích xung quanh hình nón cụt :

$$S_1 = \pi(R+r)l = \pi(R+r)^2.$$

b) Từ trung điểm I của OO_1 , hạ $IK \perp AA_1$.

Vẽ $IE \parallel OA$.

$$\triangle HA_1A \sim \triangle KIA \Rightarrow \frac{KI}{HA_1} = \frac{IE}{A_1A} = \frac{R+r}{2(R+r)} = \frac{1}{2}$$

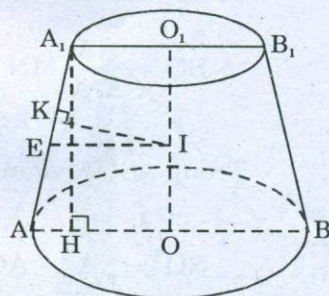
$$\Rightarrow KI = \frac{1}{2}HA_1 = \sqrt{Rr}$$

Do đó nội tiếp trong hình nón cụt một hình cầu tâm I , bán kính $\sqrt{Rr}$.

c) Ta có : $S_2 = 4\pi(\sqrt{Rr}) = 4\pi Rr$

$$\text{Vậy : } k = \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}\right)^2 < 1$$

$$\text{Do bất đẳng thức Cauchy : } R+r > 2\sqrt{Rr} \Leftrightarrow 1 > \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r} \quad \blacksquare$$



BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy a . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trong các trường hợp sau :
 - a) Cạnh bên tạo với đáy góc 30° .
 - b) Mặt bên tạo với đáy góc 60° .
2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a . Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trong các trường hợp sau :
 - a) Cạnh bên tạo với đáy góc 30° .
 - b) Mặt bên tạo với đáy góc 60° .
3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = a$, $AD = b$, mp (ACD) vuông góc mp (BCD) .
 - a) Chứng minh $\triangle ACD$ vuông.
 - b) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. SA vuông góc mp $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi E là trung điểm của AD . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CDE$.
5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng a . Gọi A' , B' , C' , D' lần lượt là trung điểm của SA , SB , SC , SD . Chứng minh có một mặt cầu qua tám điểm A , B , C , D , A' , B' , C' , D' . Tính thể tích khối cầu đó.
6. Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc mp (ABC) , $AD = BC = 5$, $AC = BD = 12$. Vẽ AH vuông góc BD , AK vuông góc CD , HK cắt (ABC) tại E . Chứng minh có một mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCHK$ nhận EA là tiếp tuyến.
7. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , tâm O . Hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là O . Cạnh bên tạo với đáy góc α mà $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Chứng minh $A'.ABC$ là tứ diện đều. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp $A'.ABC$.
8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm của AD , N là tâm hình vuông $CC'D'D$. Tính thể tích khối cầu qua các điểm B , C' , M , N .
9. Tìm hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong một hình cầu bán kính R cho trước.

10. Tìm hình nón có thể tích lớn nhất, nhỏ nhất nội tiếp trong mặt cầu có bán kính R cho trước.
11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$. Góc của hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) là 30° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ.
12. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$ nằm trong mp (P) . Gọi N là điểm đối xứng của O qua A . Lấy M sao cho MN vuông góc mp (P) và $MN = 2R$. Gọi (S) là mặt cầu qua M và đường tròn (O) .

- a) Xác định tâm I của mặt cầu (S) .
- b) Từ I kẻ IK vuông góc MN ($K \in MN$). Chứng minh :

$$IK^2 + KM^2 = IO^2 + OA^2.$$

- c) Tính IO và thể tích khối cầu (S) .
13. Hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh bên là l , các mặt bên tạo với đáy góc α ($0 < \alpha < 90^\circ$).
- a) Chứng minh $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều.
- b) Tính theo l, α bán kính mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.
- c) Chứng minh $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{3}$ dấu = xảy ra khi $S.ABC$ là tứ diện đều.

MỤC LỤC

Chủ đề 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau	5
Chủ đề 2: Tìm giao điểm đường thẳng d và mặt phẳng (α)	11
Chủ đề 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng	17
Chủ đề 4: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy	24
Chủ đề 5: Tìm mặt cắt của mặt phẳng (α) và hình chóp	30
Chủ đề 6: Hai đường thẳng song song	37
Chủ đề 7: Đường thẳng song song với mặt phẳng	47
Chủ đề 8: Xác định mặt cắt của đa diện và mặt phẳng song song đường thẳng a cho trước	54
Chủ đề 9: Hai mặt phẳng song song	65
Chủ đề 10: Tìm thiết diện của đa diện tạo bởi mặt phẳng song song với mặt phẳng cho trước	72
Chủ đề 11: Hình lăng trụ	80
Chủ đề 12: Phép chiếu song song	91
Chủ đề 13: Vectơ trong không gian	95
Chủ đề 14: Tính góc của hai đường thẳng chéo nhau	109
Chủ đề 15: Đường thẳng vuông góc mặt phẳng	116
Chủ đề 16: Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng	132
Chủ đề 17: Dựng đường thẳng qua điểm a cho trước và vuông góc mp (α) cho trước. Tính khoảng cách từ điểm a đến mp (α)	140
Chủ đề 18: Xác định mặt cắt của đa diện và mp (α) qua điểm M cho trước và vuông góc đường thẳng d cho trước	147

Chủ đề 19: Góc của hai mặt phẳng	158
Chủ đề 20: Hai mặt phẳng vuông góc nhau	177
Chủ đề 21: Xác định mặt cắt của đa diện và $m_p(\alpha)$ chứa đường thẳng a cho trước và vuông góc $m_p(\alpha)$ cho trước	187
Chủ đề 22: Dựng đường vuông góc chung. Tính khoảng cách của hai đường chéo nhau	194
Chủ đề 23: Thể tích khối chóp	207
Dạng 1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc đáy	207
Dạng 2. Khối chóp có mặt bên vuông góc đáy	226
Dạng 3. Khối chóp đa giác đều	235
Dạng 4. Khối chóp có $SH \perp (ABCD)$, với $H \in (ABCD)$	244
Chủ đề 24: Thể tích khối lăng trụ	262
Dạng 1. Lăng trụ đứng	262
Dạng 2. Lăng trụ xiên	281
Chủ đề 25: Hình nón	294
Chủ đề 26: Hình trụ	306
Chủ đề 27: Mặt cầu. Thể tích khối cầu	315



Nhà sách HỒNG ÂN
www.nhasachhongan.com.vn
 Email: nhasachhongan@hotmail.com
 20C Nguyễn Thị Minh Khai - Q.1 - TP.HCM
 ĐT: (08) 38246706 - 39107371 - 39107095 ♦ Fax: 39107053
 Diễm đèn của tri thức

Mời bạn tìm đọc:



Bán tại

- NS MINH TÂM, 245 Trần Nguyên Hãn - HP * ĐT: (0313) 858699
- 29&31 Phan Bội Châu - Hải Phòng *ĐT: (0313) 839599
- 04 Lý Thái Tổ - TP. Đà Nẵng *ĐT: 0511.3823421
- 259 Lê Duẩn - TP. Vinh - ĐT: 0383.554777
- 39-41 Võ Thị Sáu - Cần Thơ * ĐT: (0710) 3818891
- 158 Tỉnh lộ 8 - TT.Củ Chi - TP.HCM *ĐT: (08) 37924216
- 51 Lý Thường Kiệt - TP Đồng Hới - QB *ĐT: (0523) 857868
- 113 Phạm Hữu Lầu - TP. Cao Lãnh * ĐT: (067) 2211794
- 66 Lý Thái Tổ - Thị xã Quảng Trị
- 518 Cách Mạng Tháng Tám - Thủ Dầu Một - BD
- 496 Võ Thị Sáu, 3/5 Tôn Đức Thắng - Long Xuyên
- 76 Hàn Thuyên - TP. Huế
- 78 Bạch Đằng - Đà Nẵng - ĐT: (0511) 3834328

Để xác định sách chính phẩm,
 chúng tôi in chìm ở bìa 1 và 4 chữ:
"NS. HỒNG ÂN"

ISBN: 978-604-939-811-7



Giá: 70.000đ